M6.

Es muss mindestens zwei Knoten geben u, v, die im E_2 mit einem Weg verbunden sind, aber in E_1 nicht (sonst hätte (V, E_1) die gleichen oder wenigere Zusammenhangskomponenten.) Der Rest des Arguments ist wie oben.] □

Diese Eigenschaft (Ergänzungseigenschaft) ist äquivalent mit der Maximalitätseigenschaft, und äquivalent mit der Eigenschaft, dass Greedy für jede Gewichtung optimal ist! (d.h. es reicht eine der Eigenschaften nachzuweisen wenn man Greedy verwenden dürfen möchte)

<u>Wir fassen zusammen, und formalisieren die obigen Begriffe abstrakt</u> →

Auf welchen Problemtyp wollen wir Greedy einsetzen?
(In diesem Fall für Greedy) wird die Lage allgemein so beschrieben:

- wir haben Elemente (Kanten)
- "gute" Teilmengen der Elemente werden gesucht (kreisfreie) (es gibt ~~eine~~ die Menge ~~der~~ "guten" Teilmengen – das System aller "guten" Teilmengen)
- mit maximalem Gesamtgewicht
- wir wollen eine optimale „gute" Teilmenge mit Greedy Schritt für Schritt aufbauen

→ hierfür ist es wichtig, dass alle Teilmengen einer <u>guten</u> (kreisfreien) Teilmenge selber gut (kreisfrei) sind, sonst wäre ein Aufbau durch kleineren Teilmengen hoffnungslos.

→ Wir fangen deshalb mit der Definition eines <u>monotonen Mengensystems</u> (d.h. des Systems von „guten" Teilmengen) an!

c.) Matroide: Definition

Ein Mengensystem ist eine Menge von Teilmengen einer (endlichen) Grundmenge X.

X

($\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen von X.)

Definition: Ein monotones Teilmengensystem über der endlichen Menge X ist ein Paar $(\mathcal{M}, X)$ so dass

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{M}$ besteht aus manchen Teilmengen von X)

- aus $Y \in \mathcal{M}$ und $Y' \subset Y$ folgt $Y' \in \mathcal{M}$

(wir nennen die Mengen $Y \in \mathcal{M}$ unabhängige Mengen)

Teilmengen von unabhängigen Mengen sind auch unabhängig

Wir wollen dass der Greedy Alg. gut funktioniert beim folgenden Problem:

Das PROBLEM (abstrakt) zu optimieren ist

Eingabe: ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ über der Menge X und Gewichtung $w_x \geq 0$ der Elemente $x \in X$

Ausgabe: Bestimme eine unabhängige Menge $Y_{max} \in \mathcal{M}$ mit maximalem Gesamtgewicht seiner Elemente.

(d.h. $$w(Y_{max}) = \max_{Y \in \mathcal{M}} w(Y)$$

wobei $$w(Y) = \sum_{x \in Y} w_x$$)

M8.

Der Greedy (Matroid-)Algorithmus für monotone Mengensysteme

- setze $Y := \emptyset$
- REPEAT
  - sei $x \in X$ das Element mit größtem Gewicht
    $X := X \setminus \{x\}$ (entferne x aus X)
  - IF $Y \cup \{x\} \in \mathcal{M}$ THEN $Y := Y \cup \{x\}$
    (falls $Y \cup \{x\}$ unabhängig ist, nimm x zu Y hinzu)

  UNTIL $X = \emptyset$

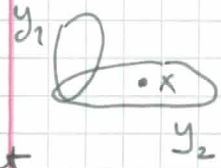
Wir definieren jetzt Matroide als monotone Mengensysteme für die der Greedy Alg. immer optimal ist. Danach beweisen wir, dass sie genau diejenige mit der Maximalitätseigenschaft, bzw. genau diejenige mit der Ergänzungseigenschaft sind:

Definition: Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ heißt ein Matroid, wenn der Greedy Algorithmus für jede Gewichtung der Elemente $x \in X$ eine maximale unabhängige Menge $Y_{max} \in \mathcal{M}$ ausgibt; (d.h. mit maximalem Gewicht).

Theorem: Für ein beliebiges monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ sind äquivalent:

(a) $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid (siehe Def. oben)

(b.) die Ergänzungseigenschaft gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1 Y_2 mit $|Y_1| < |Y_2|$ gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{M}$



(c) die Maximalitätseigenschaft gilt: alle nicht vergrößerbaren (in Z) unabhängigen Teilmengen einer beliebigen Menge $Z \subseteq X$ besitzen dieselbe Größe.

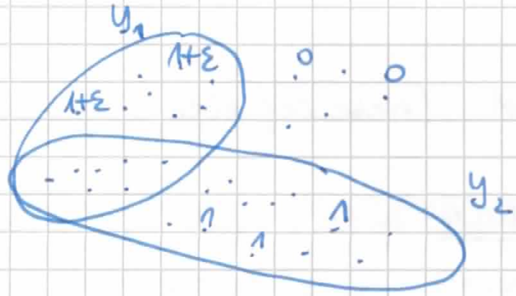
Beweis: wir werden (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) beweisen.

(a) $\Rightarrow$ (b) Angenommen $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid (Greedy für jede Gewichtung funktioniert), zeigen wir die Ergänzungseigenschaft, dh. wenn Y_1 und Y_2 unabhängig sind und $|Y_1| < |Y_2|$ dann kann Y_1 um ein Element aus Y_2 ergänzt werden.

Beweis durch Widerspruch: wir nehmen an, dass es solche Y_1 und Y_2 gibt, dass Y_1 nicht ergänzt werden kann aus Y_2

M 10.

sei $|Y_1| = p$



wir zeigen, dass in diesem Fall $\mathcal{M}$ doch kein Matroid ist, d.h. es gibt eine Gewichtung, so dass der Greedy Algorithmus eine nicht-optimale Lösung bestimmt. Eine geeignete Gewichtung dürfen wir wählen!

Wie können wir (mit welchen Gewichten) den Greedy Algorithmus reinlegen? Wir wollen, dass er Y_1 ~~[illegible]~~ findet (dort sind die Gewichte ein wenig höher), aber dann Y_1 nicht mehr erweitern kann; und jedoch ist Y_2 optimal, mit bischen kleineren Einzelgewichten.

Seien die Gewichte $w_x = \begin{cases} 1+\varepsilon & x \in Y_1 \\ 1 & x \in Y_2 \setminus Y_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

→ Greedy wählt die Elemente von Y_1 zuerst

→ dann kann er Y_1 nicht aus Y_2 ergänzen

(ergänzt höchstens mit 0-Gewicht Elementen)

→ Greedy erreicht eine Lösung mit Gewicht

$$p \cdot (1+\varepsilon) = p + \varepsilon \cdot p$$

das Optimum ist aber mindestens

$$(p+1) \cdot 1 = p+1 > p + \varepsilon \cdot p \text{ falls}$$

ε klein genug.

(das Skript wählt $w_x = \begin{cases} p+2 & x \in Y_1 \\ p+1 & x \in Y_2 \setminus Y_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Greedy erreicht $p \cdot (p+2) = p^2 + 2p$

Opt ist $\geq (p+1) \cdot (p+1) = p^2 + 2p + 1$)

$\square$

(b) $\Rightarrow$ (c) Ergänzungseigenschaft $\Rightarrow$ Maximalitätseigenschaft.

Seien $Y_1, Y_2 \subseteq Z$ beide nicht-vergrößerbare (in Z) unabhängige Mengen

dann gilt $|Y_1| = |Y_2|$, sonst könnte man die kleinere aus der größeren Menge doch vergrößern, sodass es unabhängig bleibt.

(c) $\Rightarrow$ (a) Voraussetzung: alle nicht-vergrößerbaren unabhängigen Teilmengen einer beliebiger Menge Z sind gleichgroß.

Wir zeigen: Greedy findet für jede Gewichtung w_x der Elemente $x \in X$ eine optimale Lösung

<u>Beweis durch Widerspruch</u>: nehmen wir an, dass es eine Gewichtung w_x gibt, so dass Greedy eine nicht-optimale Lösung Y ausgibt. Sei Y^* eine optimale Lösung.

Da (Greedy) Y und auch Y^* oBdA. nicht-vergrößerbare Lösungen sind, gilt $|Y| = |Y^*| = m$ (für ein m)

(wie sich Y und Y^* schneiden, spielt keine Rolle)

(der Beweis ist Analog zur Optimalität vom Kruskal-Alg.)

M 12.

Seien $Y = \{y_1\, y_2 \dots y_m\}$

und $Y^* = \{y_1^*\, y_2^* \dots y_m^*\}$

so dass die entsprechenden Gewichte absteigend sind:

$$w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m$$

$$w_1^* \geq w_2^* \geq \dots \geq w_m^*$$

Da Y^* optimal ist und Y nicht, gibt es Elemente y_i und y_i^* so dass $w_i < w_i^*$

Sei y_k das erste solche Element in der Folge, d.h. es gelte

$$\begin{array}{cccccc}
y_1 & w_1 & \geq & w_1^* & y_1^* & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\
y_2 & w_2 & \geq & w_2^* & y_2^* & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\
 & & \vdots & & & Z \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\
y_{k-1} & w_{k-1} & \geq & w_{k-1}^* & y_{k-1}^* & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\
 & w_k & < & w_k^* & y_k^* &
\end{array}$$

Sei $Z = \{y_1, y_2 \dots y_{k-1}\} \cup \{y_1^*\, y_2^* \dots y_{k-1}^*\, y_k^*\}$

beachte, dass die Elemente von Z haben alle Gewicht mindestens w_k^*. dürfen sich schneiden

→ die unabhängige Menge $\{y_1\, y_2 \dots y_{k-1}\}$ ist nicht-vergrößerbar in Z, weil Greedy kein weiteres Element mit Gewicht größer als w_k findet, und $w_k < w_k^* \leq$ alle Gewichte in Z

→ es gibt in Z aber auch eine größere unabhängige Menge, nämlich

$$\{y_1^*\, y_2^* \dots y_{k-1}^*\, y_k^*\}$$

dies widerspricht der Voraussetzung dass die Maximalitätseigenschaft gilt. $\square$

d.) Matroide: Beispiele

1. Graph-Matroid

Sei $G(V,E)$ ein fixierter Graph

Seien $\mathcal{W} = \{E' \subseteq E \mid E' \text{ kreisfrei (Wald)}\}$ die unabhängigen Mengen. Dann ist $(\mathcal{W}, E)$ ein Matroid.
(die Ergänzungseigenschaft und auch die Maximalitätseigenschaft haben wir für Graph-Matroide oben bewiesen)
Sei w_e eine Gewichtung der Kanten. Der Greedy Matroid Algorithmus berechnet für G einen Spannbaum (einen Spannwald, falls nicht zusammenhängend) mit maximalem Gewicht.

Sei für jede $e \in E$ $w_e < w$ und setzen wir $w_e' = w - w_e$ als neue Gewichte, dann berechnet der Greedy Matroid Algorithmus einen minimalen Spannbaum (Spannwald), weil w genau $(n-r)$-mal im Gesamtgewicht vorkommt, also $\sum_{e \in S} w_e$ wird minimiert.

2. Matrix-Matroid

((Spalten-)Vektoren einer Matrix -> deshalb der Name Matroid)

Sei $X = \{v_1 v_2 \dots v_m\}$ wo $v_1 v_2 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind

$$\mathcal{L} = \{ Y \subseteq X \mid Y \text{ ist linear unabhängig} \}$$

dann ist $(\mathcal{L}, X)$ ein Matroid

deshalb der Name unabhängig

→ Jede nicht vergrößerbare linear unabhängige Teilmenge einer fixierten Menge $Z \subseteq X$ hat die gleiche Anzahl von Vektoren (in $\mathbb{R}^m$ selbst wären das m Vektoren, eine Basis)

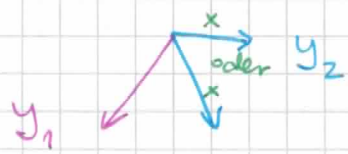
aber $\mathbb{R}^m$ ist nicht endlich

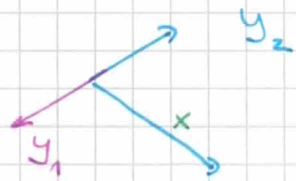
M14.

- Teilmengen von linear unabhängigen Mengen Y sind auch linear unabhängig

- Ergänzungseigenschaft für Matrix-Matroide: eine kleinere linear unabhängige Vektormenge kann immer aus jeder größeren linear unabhängigen Menge um einen Vektor x ergänzt werden so dass es linear unabhängig bleibt.

Beispiele in $\mathbb{R}^2$





in $\mathbb{R}^3$

$$Y_2 = \left\{ \begin{matrix} (1\ 0\ 0) \\ (0\ 1\ 0) \\ (0\ 0\ 1) \end{matrix} \right\} \qquad Y_1 \left\{ \begin{matrix} (1\ 1\ 0) \\ (1\ -1\ 0) \end{matrix} \right\}$$

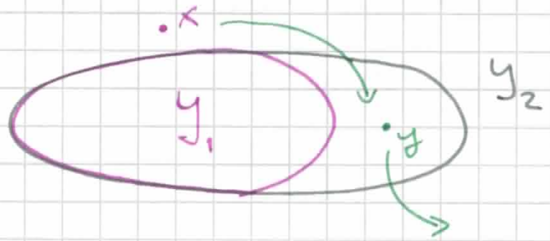
lin unabhängig

Eine 4-te äquivalente Matroid-Eigenschaft

(d.) Austauschbarkeit (auch Erweiterbarkeit genannt)

Ein monotones Teilmengensystem ist austauschbar wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und jedes $x \notin Y_2$, wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine $y \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

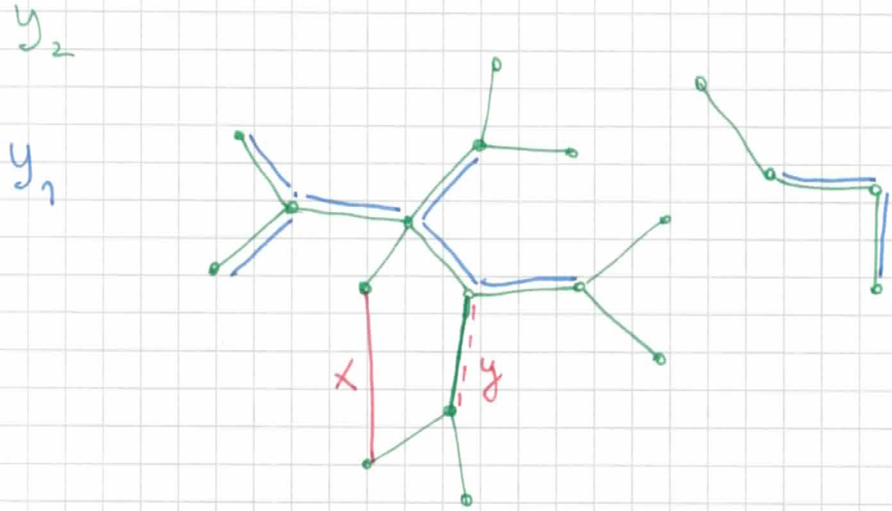
(d.h. wir können x gegen eine y tauschen, und somit Unabhängigkeit bewahren)



(Beachte: wenn $Y_2 \cup \{x\}$ auch unabhängig ist, dann brauchen wir kein y rauszuwerfen,
wir dürfen aber beliebige $y \in Y_2 \setminus Y_1$ rauswerfen.)

<u>Beispiel</u>: Seien $Y_1 \subset Y_2$ kreisfreie Kantenmengen,

so dass $Y_1 \cup \{x\}$ auch kreisfrei (unabhängig) aber $Y_2 \cup \{x\}$ hat einen Kreis (Wamm kann x nicht mehr Kreise schließen??)



→ es gibt mindestens eine andere Kante in diesem Kreis die kein Element von Y_1 ist, (sonst hätte $Y_1 \cup \{x\}$ auch einen Kreis – den selben). Eine solche ~~diese~~ Kante $y \in Y_2 \setminus Y_1$ aus dem Kreis ~~soll~~ kann gegen x getauscht werden, damit $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ kreisfrei ist.

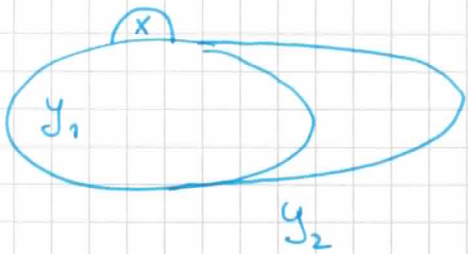
M 16.

Theorem: Die Austauschbarkeit ist äquivalent mit den drei bisherigen Matroid-Eigenschaften für ein monotones Mengensystem (M, X):

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$

Beweis: wir zeigen nur eine Richtung, nämlich, dass die Austauschbarkeit aus der Ergänzungseigenschaft folgt $(b) \Rightarrow (d)$:

Seien $Y_1 \subset Y_2$ und $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig, $Y_2 \cup \{x\}$ aber zusammenhängend (nicht unabhängig)



- falls $|Y_1| + 1 = |Y_2|$, dann werfen wir das einzige Element y in $Y_2 \setminus Y_1$ raus, und erhalten $Y_1 \cup \{x\} = Y_2 \setminus \{y\} \cup \{x\}$ als unabhängige Menge

- falls $|Y_1| + 1 < |Y_2|$, können wir laut Ergänzungseigenschaft Elemente $y_1, y_2 ..$ aus Y_2 zu $Y_1 \cup \{x\}$ hinzunehmen. Dies können wir solange machen, bis $Y_1 \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2, y_3 ...\}$ $|Y_2|$-viele Elemente hat, d.h. nur ein Element y wurde noch nicht zu $Y_1 \cup \{x\}$ genommen. Wir haben jetzt eine unabhängige Menge, in der y gegen x getauscht wurde in Y_2. □

Ein drittes Matroid-Beispiel:

3. MATROID-SCHEDULING

Eingabe: n Jobs $A_1\ A_2 \ldots\ A_n$ mit entsprechenden
Fristen $f_1\ f_2 \ldots\ f_n$
und Strafen $b_1\ b_2 \ldots\ b_n$

b_i ist zu bezahlen wenn A_i zum Zeitpunkt f_i nicht abgearbeitet ist.

Die Ausführung einer jeden Aufgabe nimmt 1 Zeitschritt

Ausgabe: Ein Schedule der Jobs auf einem Prozessor, so dass die zu zahlende Strafe minimal ist

Was nehmen wir hier als Elemente der Grundmenge X, und was seien die Gewichte?

→ die Elemente werden die Jobs sein:

$$X = \{A_1\ A_2 \ldots\ A_n\}$$

→ wir wollen die Gesamtstrafe minimieren, d.h. die Strafe der nicht-ausgeführten Jobs. Das ist dasselbe wie die Strafe der ausgeführten Jobs zu maximieren! Sei deshalb b_i das Gewicht von Job A_i und

Welche Job-Mengen nennen wir unabhängig?

→ alle fristgerecht ausführbare Jobmengen.

M 18.

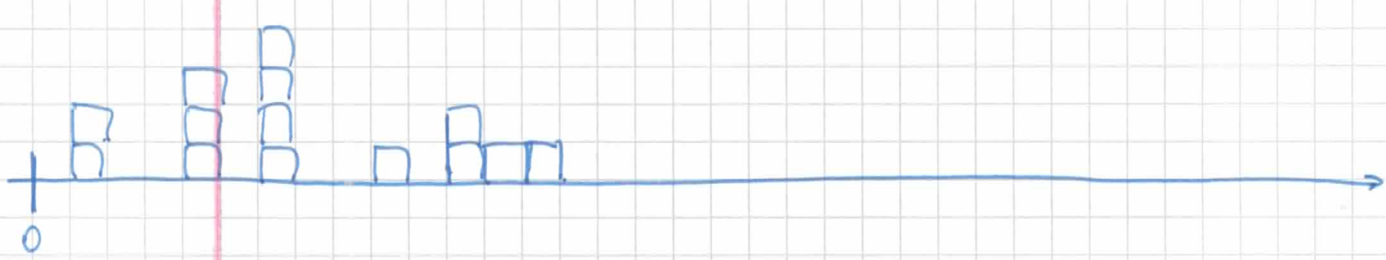
Definition: Eine Jobmenge $Y \subseteq X$ ist unabhängig

d.h. $Y \in \mathcal{M}$, genau dann wenn die Jobmenge ohne Fristüberschreitung von einzelnen Jobs, ausführbar ist.

Behauptung: $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid, und der Greedy Algorithmus liefert eine optimale Lösung (mit minimaler Strafe).

Woran erkennt man (oder der Greedy Algorithmus) ob eine Jobmenge Y fristgerecht ausführbar (d.h. unabhängig) ist?

Die folgende Darstellung wird hilfreich:



wir stellen jeden Job A_i genau vor seiner Frist f_i dar.

Eine Teilmenge der Jobs ist genau dann nicht fristgerecht ausführbar wenn ~~vor~~ irgendeinem Zeitpunkt f mehr als f Jobs auszuführen sind

(wie im Bild für $f = 7$ dies ist der Fall)

Beweis (dass (M, X) ein Matroid ist).

Wir weisen die Austauschbarkeit nach:

→ Falls $Y_1 \subset Y_2$, und $Y_1 \cup \{x\}$ und Y_2 ausführbare Aufgabenmengen sind, $Y_2 \cup \{x\}$ aber nicht ausführbar ist, wir sollen einen Job $y \in Y_2 \setminus Y_1$ finden, so dass $Y_2 \setminus \{y\} \cup \{x\}$ ausführbar ist.

→ Da $Y_2 \cup \{x\}$ nicht fristgerecht ausführbar ist, gibt es mindestens eine Frist f, so dass ($f > f_x$ und) $f+1$ Jobs vor f auszuführen sind wenn wir x zu Y_2 hinzunehmen.

Sei f^* die kleinste solche verletzte Frist. Wenn alle Jobs mit Frist $\leq f^*$ in Y_1 wären, dann wäre $Y_1 \cup \{x\}$ auch nicht ausführbar. Deshalb gibt es **mindestens** einen Job y mit Frist $f_y \leq f^*$ so dass $y \in Y_2 \setminus Y_1$. y kann rausgeworfen werden, d.h. $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ ist fristgerecht ausführbar. $\square$

Greedy Alg: $S = \emptyset$

WHILE $X \neq \emptyset$ DO
- wähle $A_i \in X$ mit größtem b_i
- setze $X = X \setminus \{A_i\}$
- falls $S \cup \{A_i\}$ ausführbar, setze $S = S \cup \{A_i\}$.

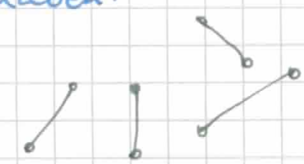
erstelle einen Schedule (z.B. von links nach rechts) der Jobs aus S.

M 20.

e.) k-Matroide und Approximationsalgorithmen

$\boxed{\text{Einführung:}}$ Wir betrachten das Mengensystem von unabhängigen Kantenmengen (Matchings) in einem beliebigen fixierten Graphen. Das ist unser durchgehendes Beispiel.

Sei $G(V,E)$ ein Graph, und für eine Kantenmenge $Y \subseteq E$ sei $Y \in \mathcal{M}$ genau dann wenn Y ein Matching ist, d.h. keine zwei Kanten aus Y einen gemeinsamen Endknoten haben.

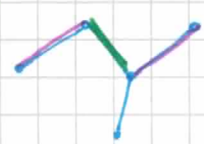


- Ist $\mathcal{M}$ ein monotones Teilmengensystem über E?

  → ja, weil jede Teilmenge eines Matchings auch ein Matching ist.

- Ist $(\mathcal{M}, E)$ ein Matroid?

  → NEIN, weil die nicht-vergrößerbaren Matchings nicht gleichviele Kanten haben:



Anders gesagt: NEIN, weil der folgende Greedy Algorithmus für max-Gewichtetes-MATCHING nicht für jede Gewichtung der Kanten optimal ist:

zB.

Greedy - Matching - Algorithmus

$M = \emptyset$

WHILE $E \neq \emptyset$ DO

- sei $e \in E$ mit maximum Gewicht w_e; $E := E \setminus \{e\}$
- falls $M \cup \{e\}$ ein Matching, $M := M \cup \{e\}$
  (sonst verwerfe e)

gib M aus

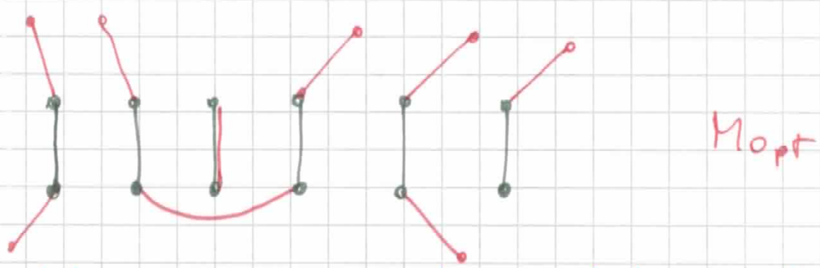
Unsere Frage: Wie schlecht approximiert dieser Algorithmus das maximale Gewicht über alle Matchings im Worst Case?
(der Approximationsfaktor)

Behauptungen:

(a) Der Greedy Algorithmus für max- Gewichtetes-MATCHING ist 2- approximativ.

Beweis: Seien erstmal alle Gewichte gleich: $w_e = 1$
sei M_{Greedy} das Matching ausgegeben von Greedy

M_{Greedy}



- M_{Greedy} bestehe aus m Kanten auf der Knotenmenge $K \subseteq V$
  klar gilt: $|K| = 2m$
- alle anderen Kanten (auch die in einem fixierten optimalen Matching M_{opt}) haben mindestens einen Endknoten in K, und alle Knoten in K haben max. eine inzidente Kante aus M_{opt}. $\Rightarrow |M_{opt}| \leq 2m = 2 \cdot |M_{greedy}|$.

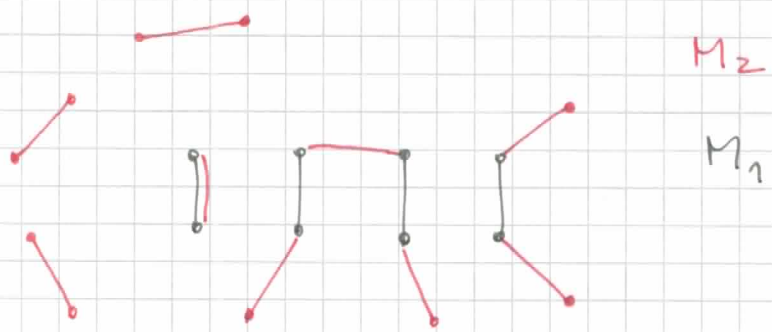
Was wenn die Gewichte w_e unterschiedlich sind?

→ jede Kante aus M_{Opt} ist entweder in M_{Greedy}, oder hat eine adjazente Kante mit höherem Gewicht in M_{Greedy} (wenn sie zwei hat, wähle eine aus)

→ jede Kante e von M_{Greedy} „gehört" in diesem Sinne zu höchstens 2 Kanten aus M_{Opt}, die beide höchstens Gewicht w_e haben. Es wurde also zu jedem Kantengewicht w_e in Greedy höchstens Gewicht $2 \cdot w_e$ in Opt eindeutig zugeordnet.

(b.) Seien M_1 und M_2 Matchings und $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, dann gibt es eine $e \in M_2 \setminus M_1$ so dass $M_1 \cup \{e\}$ ein Matching ist, also die <u>2-Ergänzungseigenschaft</u> gilt.

<u>Beweis:</u> (fast dasselbe wie bei (a))



Sei $|M_1| = m$. Es gibt höchstens $2m$ Kanten in M_2, die adjazent sind mit Kanten aus M_1. Da aber $|M_2| > 2 \cdot |M_1| = 2 \cdot m$, soll es in M_2 auch mit M_1 nicht-adjazente Kanten geben; eine solche Kante kann zu M_1 hinzugenommen werden.

M23.

(c) Sei $E' \subseteq E$. Wenn M_1 und M_2 nicht-vergrößerbare Matchings im Graphen (V, E') sind, dann gilt $|M_2| \leq 2 \cdot |M_1|$ (also mit Rollentausch auch $|M_1| \leq 2|M_2|$)

d.h. die 2-Maximalitätseigenschaft gilt.

Beweis: (wieder dasselbe)

Angenommen $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, könnte man M_1 mit einer Kante aus M_2 vergrößern, wie oben.

Monotone Teilmengensysteme, die (a) oder (b) oder (c) erfüllen, nennt man 2-Matroide. Hier definieren wir k-Matroide allgemein für $k \in \mathbb{N}_+$
(Matroide sind die 1-Matroide)

Definition: k-Matroide

Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ heißt k-Matroid, wenn der Greedy Algorithmus für jede Gewichtung der Elemente eine k-approximative Lösung ausgibt. Die Folgenden sind äquivalent für ein monotones Teilmengensystem:

(a.) $(\mathcal{M}, X)$ ist ein k-Matroid

(b.) die k-Ergänzungseigenschaft gilt für $(\mathcal{M}, X)$: wenn $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, und $|Y_2| > k \cdot |Y_1|$, dann gibt es eine $x \in Y_2 \setminus Y_1$, so dass $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

(falls Y_2 viel größer, dann kann Y_1 aus Y_2 ergänzt werden) (c.) <u>die k-Maximalitätseigenschaft</u> gilt: Für beliebige

$Z \subseteq X$ und $Y_1, Y_2 \subseteq Z$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, wenn Y_1 und Y_2 beide nicht-vergrößerbar sind in Z, dann

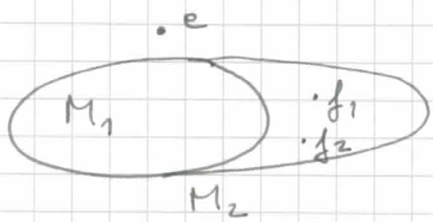
$$|Y_2| \leq k\,|Y_1|$$

(das eine ist max. um Faktor k größer als das andere)

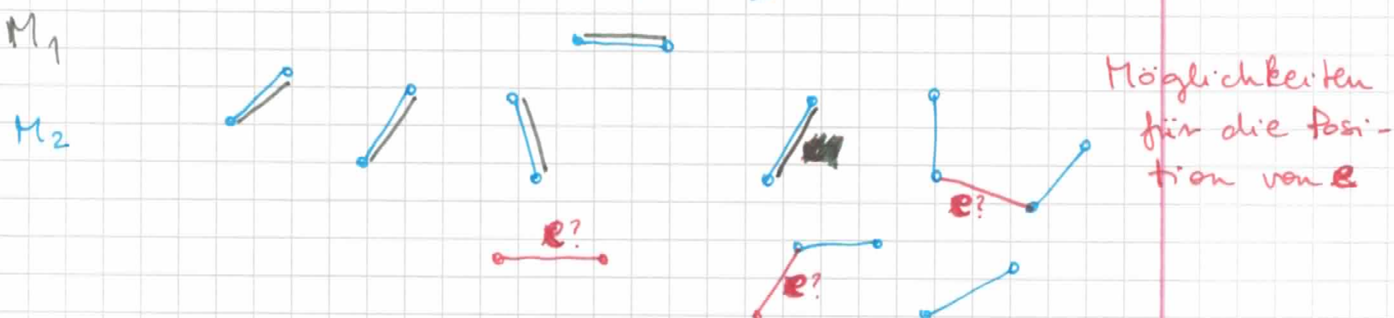
Wir hatten noch die Eigenschaft (d), Austauschbarkeit.
Was ist mit k-Austauschbarkeit?

<u>Beispiel</u>: Matchings sind 2-austauschbar (2-erweiterbar):

Sei $G(V,E)$ fixiert, seien $M_1 \subseteq M_2$ Matchings, und $M_1 \cup \{e\}$ auch ein Matching.



dann gibt es (höchstens) 2 Kanten $f_1, f_2 \in M_2 \setminus M_1$ so dass $(M_2 \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{e\}$ ein Matching ist.
(vielleicht ist $M_2 \cup \{e\}$ auch ein Matching, oder es reicht nur eine Kante zu entfernen)



e kann mit höchstens 2 Kanten aus M_2 adjazent sein. Nach dem Entfernen dieser höchstens 2 Kanten, werden die verbleibenden Kanten in M_2 mit e ein Matching bilden.

(c.) <u>die k-Maximalitätseigenschaft</u> gilt: Für beliebige

$Z \subseteq X$ und $Y_1, Y_2 \subseteq Z$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, wenn Y_1 und Y_2 beide nicht-vergrößerbar sind in Z, dann

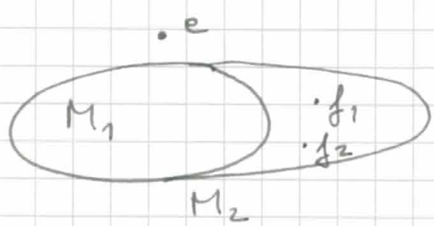
$$|Y_2| \leq k\,|Y_1|$$

(das eine ist max. um Faktor k größer als das andere)

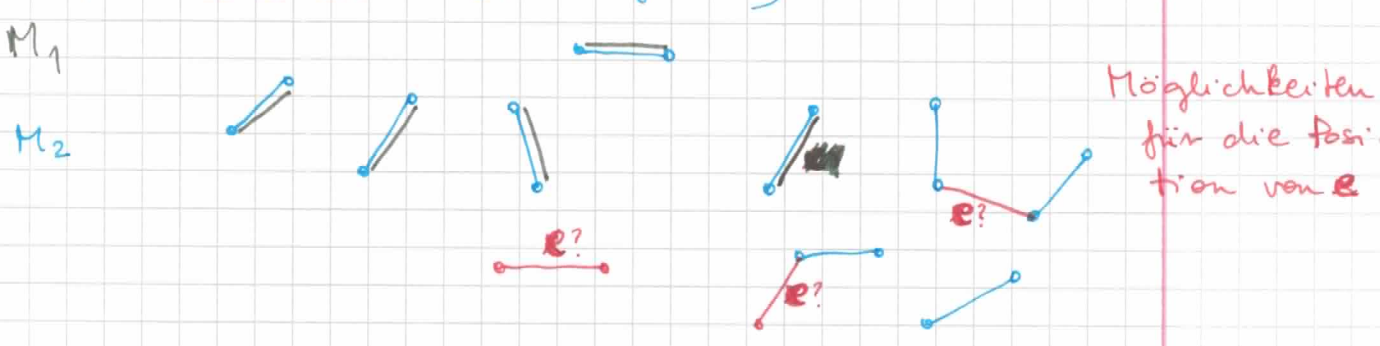
Wir hatten noch die Eigenschaft (d), Austauschbarkeit.
Was ist mit k-Austauschbarkeit?

<u>Beispiel</u>: Matchings sind 2-austauschbar (2-erweiterbar):

Sei: $G(V,E)$ fixiert, seien $M_1 \subseteq M_2$ Matchings, und $M_1 \cup \{e\}$ auch ein Matching.



dann gibt es (höchstens) 2 Kanten $f_1, f_2 \in M_2 \setminus M_1$ so dass $(M_2 \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{e\}$ ein Matching ist.
(vielleicht ist $M_2 \cup \{e\}$ auch ein Matching, oder es reicht nur eine Kante zu entfernen)



e kann mit höchstens 2 Kanten aus M_2 adjazent sein. Nach dem Entfernen dieser höchstens 2 Kanten, werden die verbleibenden Kanten in M_2 mit e ein Matching bilden.

Definition:

(d.) Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ ist **k-austauschbar** (k-erweiterbar), wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und für jedes Element $x \notin Y_2$ gilt: wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine Teilmenge $T \subseteq Y_2 \setminus Y_1$ von höchstens k Elementen so dass $(Y_2 \setminus T) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

Theorem: Wenn $(\mathcal{M}, X)$ k-austauschbar ist, dann ist es ein k-Matroid. Die Umkehrung gilt nicht immer (für $k>1$)

d.h. für $k>1$ $\quad (d) \Rightarrow (a)$

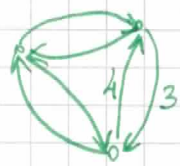
aber $(a) \not\Rightarrow (d)$ $\quad$ (Beweis im Skript)

Beispiel: MAX-TSP

Eingabe: Vollständiger gerichteter Graph $\vec{K}_n(V, \vec{E})$ mit Kantengewichten w_e

$(V = \{1, 2, \dots, n\} \quad (i,j) \in E$ und $(j,i) \in E)$

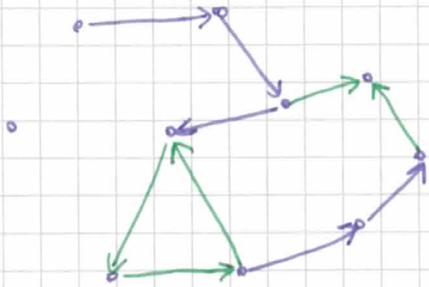
Ausgabe: Eine Rundreise (Hamiltonscher Kreis) mit maximaler Länge.



→ die Grundmenge besteht aus allen gerichteten Kanten:
$X = \vec{E}$

Wir wollen, dass die nicht-vergrößerbaren unabhängigen Kantenmengen genau die Rundreisen sind. Welche sollen dann die unabhängigen Mengen $(Y \in \mathcal{M})$ sein?

→ für eine Menge von Kanten $Y \subseteq \mathcal{M}$ (ist unabhängig), wenn Y aus Knoten-disjunkten gerichteten Pfaden besteht, oder eine Rundreise ist.



unabhängig

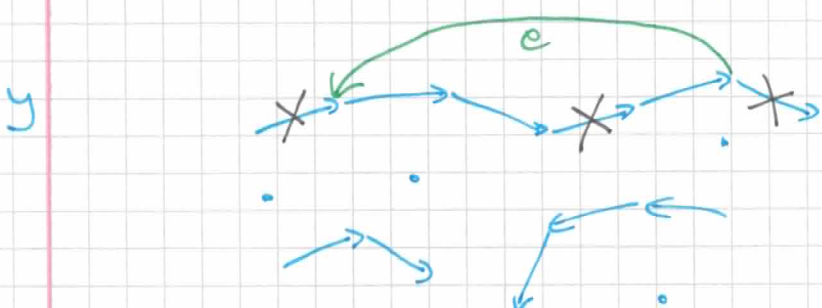
nicht-unabhängig

<u>Behauptung:</u> Dieses Mengensystem $(\mathcal{M}, E)$ ist 3-erweiterbar. (3-austauschbar)

Daraus folgt: Der Greedy-Algorithmus berechnet eine 3-approximative Lösung für MAX-TSP.

Warum ist $(\mathcal{M}, E)$ 3-austauschbar?

Mit dem Entfernen von höchstens 3 Kanten aus einer beliebigen unabhängigen Menge Y kann eine beliebige Kante $e \in E \setminus Y$ zu Y hinzugenommen werden so dass das Ergebnis aus knotendisjunkten Pfaden besteht: Ein worst-case Beispiel:



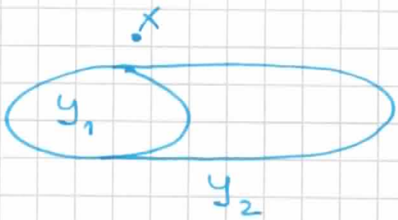
Theorem: Ein Durchschnitt von k Matroiden ist k-austauschbar und deshalb ein k-Matroid.

Beweis: $(\mathcal{M}_1, X)\ (\mathcal{M}_2, X) \ldots (\mathcal{M}_k, X)$

seien 1-Matroide; sie sind also 1-austauschbar

Sei $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_k$

d.h. Y ist unabhängig falls es in allen $\mathcal{M}_i$ unabhängig ist



Seien
$Y_1 \subset Y_2$ $\quad Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$
und $(Y_1 \cup \{x\}) \in \mathcal{M}$

Können wir jetzt höchstens k Elemente $y_1\, y_2 \ldots y_k$ aus $Y_2 \setminus Y_1$ entfernen so dass dann $(Y_2 \setminus \{y_1 \ldots y_k\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}$

$\exists\ y_1 \quad (Y_2 \setminus \{y_1\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}_1$

$\exists\ y_2 \quad (Y_2 \setminus \{y_2\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}_2$

$\vdots$

$\exists\ y_k \quad (Y_2 \setminus \{y_k\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}_k$

$$\Rightarrow (Y_2 \setminus \{y_1\, y_2 \ldots y_k\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{M}$$

$\square$

A1.

Arora's PTAS für das euklidische Travelling Salesman Problem

(Skizze) (Siehe auch bei Vazirani S. 84.)

Wir beschränken uns auf die Ebene:
Seien n Punkte (Orte) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben.

a.) Vorbereitungen

Wir möchten, dass die Koordinaten der Punkte ganzzahlig sind, aber so dass das Raster aller dieser ganzen Zahlen nicht zu grob (→ schlechte Approximation) und nicht zu fein (→ nicht-polynomielle Laufzeit) ~~gesetzt~~ wird.

Zu diesem Zweck werden wir die Koordinaten der Eingabepunkte (verschieben,) skalieren, und runden.

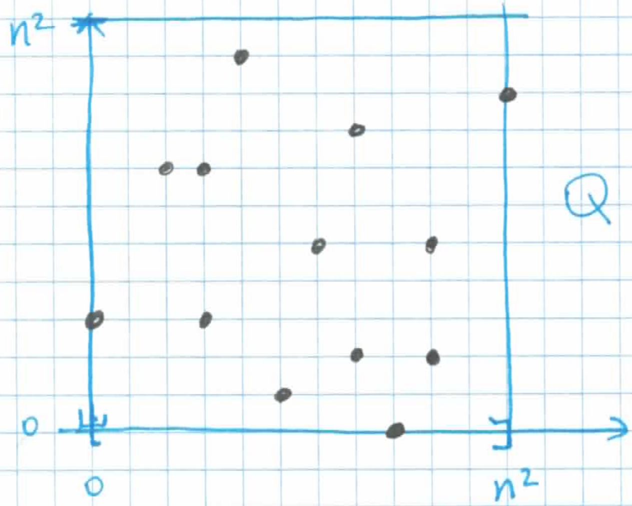
Verschieben: damit die kleinsten Koordinaten horizontal und vertikal 0 sind

Skalieren: so dass die größte Koordinate entweder horizontal oder vertikal gleich n^2 ist.

Runden: jede Koordinate wird abgerundet

$$P(x, y) \longrightarrow P'(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$$

Jetzt sind die Positionen ganzzahlig und alle im Quadrat $\{0, n^2] \times [0, n^2] = Q$



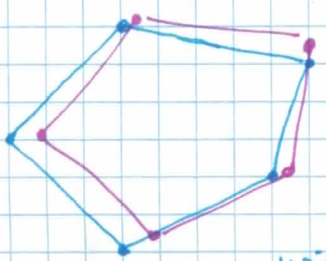
Damit haben wir auch eine untere Schranke für die Länge einer optimalen Rundreise: wir müssen vom linkesten ~~[illegible]~~ Punkt zum rechtesten und zurück: $OPT \geq 2n^2$ (oder vom untersten ~~zum~~ obersten)

[Wie ändert die Rundung die Länge einer optimalen Rundreise? Beachte, dass $d(P, P') < \sqrt{2}$ gilt für die Distanz einer Eingabepunkt P vom abgerundeten Punkt P'

OPT

die Länge <u>einer</u> "Kante" in der Rundreise ändert sich höchstens um einen additiven $\pm 2\sqrt{2}$ (warum?)

eine gerundete Rundreise



die Länge einer optimalen Rundreise über die gerundeten Punkte ändert sich um $\pm n \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \leq O(\frac{1}{n})\,OPT$

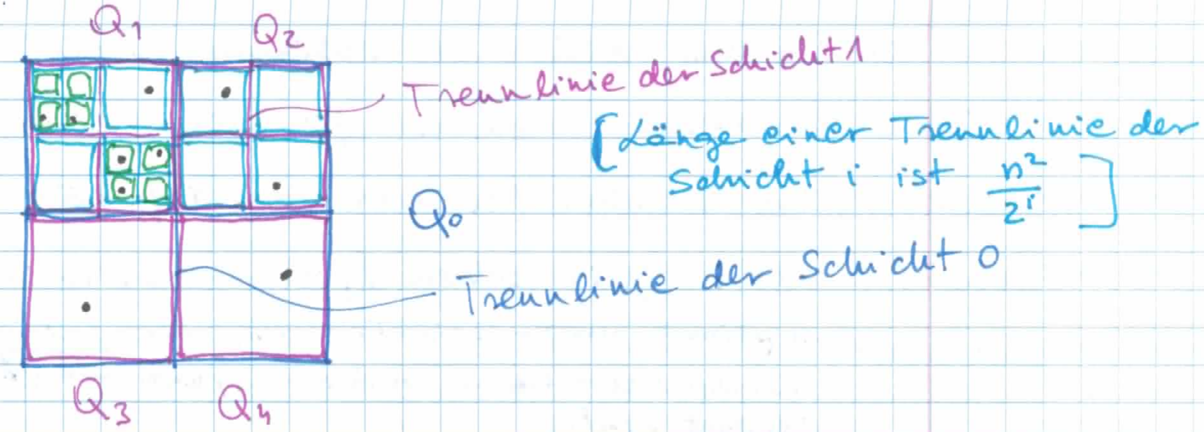
$= \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot 2n^2 \leq$

$\downarrow$

wir berechnen eigentlich eine $\left(1 + \varepsilon + O(\frac{1}{n})\right)$-approximative Rundreise]

b) eine fast-optimale Rundreise mit dynamischer Programmierung (die Idee)

$Q_0 = [0, n^2) \times [0, n^2]$



- wir Teilen das Quadrat mit zwei Trennlinien in vier gleichgroße Teilquadrate; diese teilen wir weiter in vier gleichgroße Teilquadrate, usw.

- ein Quadrat wird nicht weiter aufgeteilt falls es nur noch 0 oder 1 Punkt von der (abgerundeten) Eingabe enthält. (dies erfolgt spätestens bei Quadrate der Länge 1, weil die Orte gerundet sind) $\Longrightarrow \leq \log n^2 = 2 \log n$ Schichte
- wir werden optimale partielle Rundreisen in den Teilquadraten bottom-up in gute partielle Rundreisen in den größeren Quadraten zusammenbauen. (Achtung: diese sind keine echten Rundreisen, nur Teillösungen die aus geraden Segmenten bestehen!) Was bedeutet hier "bottom-up"?
- Die Aufteilung in Teilquadrate entspricht dem folgenden Baum