LINEARE PROGRAMMIERUNG

(Buch über LP: Bertsimas – Tsitsiklis; siehe auch Kap. 9.4–9.9 in Moore-Mertens)

a.) Definition, kanonische Form

Lineare Programmierung ist eine der wichtigsten Methoden der Optimierung, und zentral für Approximationsalgorithmen für schwierige Probleme (S.a. Shmoys, Vazirani)

Beispiel: Minimiere:

$$2x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3$$ (eine lineare Zielfunktion)

so dass

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &\leq 2 \\
3x_2 - x_3 \quad\quad &= 5 \\
x_3 + x_4 &\geq 3 \\
x_1 \quad\quad &\geq 0 \\
x_3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

(lineare Nebenbedingungen – Gleichungen o. Ungleichungen; es kommen keine höheren Potenzen der Variablen oder andere Funktionen vor)

x_1 x_2 x_3 x_4 sind Variablen. Eine Belegung der Variablen wird gesucht, die unter allen Lösungen die die Nebenbedingungen erfüllen, die Zielfunktion minimiert.

(manche Bedingungen betreffen das Vorzeichen von Variablen $x_1 \geq 0$, $x_3 \leq 0$ diese werden meistens separat behandelt)

Wir haben einen Vektor von Variablen $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Der lineare Term in den (Un)gleichungen kann als inneres Produkt mit einem Vektor (von Koeffizienten Konstanten) aufgefasst werden:

$$a_1^T = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}) = (1, 1, 0, 1)$$
$$a_2^T = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}) = (0, 3, -1, 0)$$

Sei $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Die erste Bedingung kann dann als $a_1^T \cdot x \le b_1$ geschrieben werden

$$a_1^T \cdot x = (1, 1, 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + x_4$$

Die zweite als $a_2^T \cdot x = b_2$, usw.

(Das innere Produkt wird sofort als Matrix-Produkt aufgefasst. Wir müssen also Vektoren von ihrem jeweiligen transponierten Vektor unterscheiden.)

für $c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$: das Ziel ist $c^T \cdot x$ zu minimieren.

Im allgemeinen betrachten wir Optimierungsprobleme der Form:

Minimiere / Maximiere $c^T \cdot x$ sodass

$$\begin{aligned} a_i^T \cdot x &\geq b_i && \text{für } i \in M_1 \\ a_i^T \cdot x &= b_i && i \in M_2 \\ a_i^T \cdot x &\leq b_i && i \in M_3 \\ x_j &\geq 0 && j \in N_1 \\ x_j &\leq 0 && j \in N_2 \end{aligned}$$

wobei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $b \in \mathbb{R}^m$ $c, a_i \in \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{Q}^m$, $\mathbb{Q}^n$)

$M_1 M_2 M_3$ ist eine Partition von $\{1, 2, \ldots, m\}$
und $N_1, N_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

Die kanonische Form: o.BdA. haben wir nur Bedingungen $a_i^T \cdot x \geq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \text{ für } i = 1, 2 \ldots m$$

$$\Updownarrow$$

Kurz:

$A \cdot x \geq b$ für eine Matrix A und Vektor b

Definition: lineares Programm in kanonischer Form:

minimiere $c^T \cdot x$ so dass $Ax \geq b$
$(x \geq 0)$

wobei $x^T = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ $c \in \mathbb{Q}^n$ $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ $b \in \mathbb{Q}^m$

<u>Beobachtung:</u> Jedes lineare Programm (LP) hat ein äquivalentes LP in kanonischer Form.

(d. h. die kanonische Form ist allgemein genug)

Warum? Wie können wir die Folgenden umformulieren?

- maximiere $c^T \cdot x \iff$ minimiere $(-c^T) \cdot x$

- Bedingungen der Form

$$a_i^T \cdot x \leq b_i \iff (-a_i^T) \cdot x \geq -b_i$$

$$a_i^T \cdot x = b_i \iff a_i^T \cdot x \geq b_i \text{ und } (-a_i^T) \cdot x \geq -b_i$$

(wir haben keine Absicht negative Koeffizienten zu meiden)

<u>Beispiel:</u> Die entsprechende Matrix für unser Beispiel in kanonischer Form ist:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anwendungsbeispiele:

Beispiel 1. Produktionsplanung (ein ökonomisches Problem)

Eine Firma herstellt n verschiedene Produkte aus m verschiedenen Rohstoffen. Eine Einheit vom Produkt j braucht a_{ij} vom i-ten Rohstoff, und erzeugt einen Erlös von c_j.

Von Rohstoff i steht eine Menge von b_i zur Verfügung.

Wir wollen den Gesamterlös maximieren (so dass der Rohstoff reicht)

Sei x_j die (gesuchte) zu produzierende Menge vom Produkt j.

Um den Erlös zu maximieren, brauchen wir

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \text{ zu maximieren.}$$

Damit für jeden Rohstoff i der Vorrat reicht, soll

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad (\text{für jedes } i \in \{1, 2, \ldots m\})$$

gelten.

$$\text{Rohstoff} \quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & \text{Produkt } j & n \\ \hline 1 & & a_{1j} & \\ i & & a_{ij} & \\ m & & a_{mj} & \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_m \end{bmatrix}$$

Die folgenden Beispiele sind klassische Optimierungsprobleme formuliert als lineare Programme:

Beispiel 2. VERTEX COVER

Sei $G(V,E)$ der Eingabegraph mit Knotengewichten w_v und $C \subseteq V$ eine (gesuchte) Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht. Sei $V = \{1, 2, \ldots n\}$.
Unsere Variablen ("decision variables") sind

$$x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$$

Die beabsichtigte Interpretation zu einer Lösung C:
$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in C \\ 0 & v \notin C \end{cases}$$

Wie können wir unsere Zielfunktion und unsere Bedingungen als ein LP formulieren? Wir werden es nicht schaffen Vertex Cover vollkommen als ein LP zu formulieren. Warum? Lineare Programme sind in Polynomialzeit lösbar, VERTEX COVER aber nicht!
($\Rightarrow$ Statt $x_v \in \{0,1\}$, können wir nur $0 \leq x_v \leq 1$ fordern.)

Was ist zu minimieren? Das Gewicht der Knotenüberdeckung:

$$\text{minimiere} \sum_{v=1}^{n} x_v \cdot w_v$$

$c^T = (w_1 w_2 \ldots \cdot w_n)$ (für ungewichtete Graphen $c^T = (1, 1, 1, \ldots 1)$)

Was sind die Nebenbedingungen? Die Kanten müssen überdeckt werden.

für jede Kante $\{u,v\} \in E$ ($|E|$ Ungleichungen)

$$x_u + x_v \geq 1$$

und $0 \leq x_v \leq 1$ ($2 \cdot |V|$ Ungleichungen)

Falls wir zusätzlich $x_v \in \{0,1\}$ fordern (was genau dem VC Problem entspricht), haben wir ein ganzzahliges Programm IP (Integer (linear) program) IP-s können aber nicht effizient gelöst werden.

Die LP Variante mit $0 \leq x_v \leq 1$ ist eine Relaxierung des IP-s (mit $x_v \in \{0,1\}$).
Wir können das LP lösen, und eine 2-Approximation erhalten, siehe später.

Beispiel 3. Das gewichtete MATCHING Problem

Eingabe: $G(V,E)$ mit Kantengewichtungen w_e

Ausgabe: Ein Matching $M \subseteq E$ mit maximum Gewicht
(keine zwei Kanten in M haben einen gemeinsamen Endpunkt)

- die Variablen x_e $e \in E$

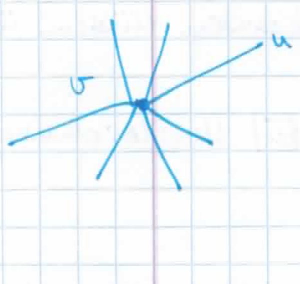
  beabsichtigte Bedeutung: $x_e = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- zu maximieren ist die Zielfunktion $\sum_{e \in E} x_e \cdot w_e$

- die Nebenbedingungen:

  (für eine LP-Relaxierung:) $0 \leq x_e \leq 1$

  und damit die Lösung ein Matching ist:
  keine adjazenten Kanten dürfen in M sein: für jeden Knoten $v \in V$ maximal eine Kante:



$$\sum_{\{u \mid \{v,u\} \in E\}} x_{\{v,u\}} \leq 1$$

(|V| Bedingungen) für jede $v \in V$ eine

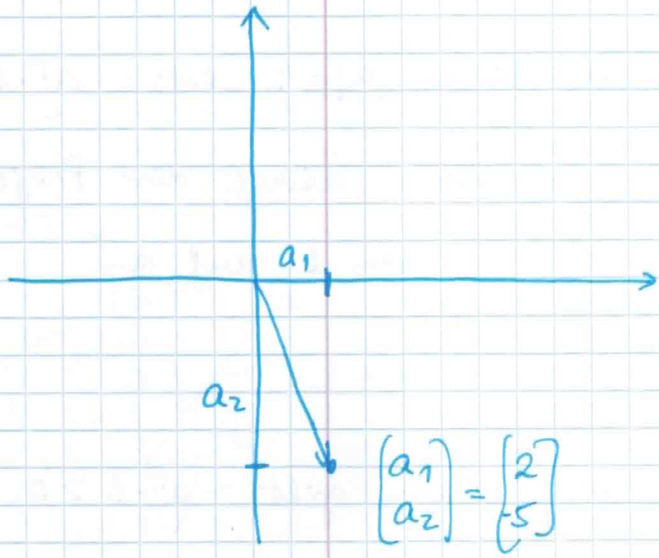
b.) Geometrische Grundlagen

i.) Geometrie in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (Wiederholung)

– der Vektor

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ usw.} \right)$$

bedeutet einen Punkt (bzw. einen Vektor mit diesem Endpunkt) in der Ebene



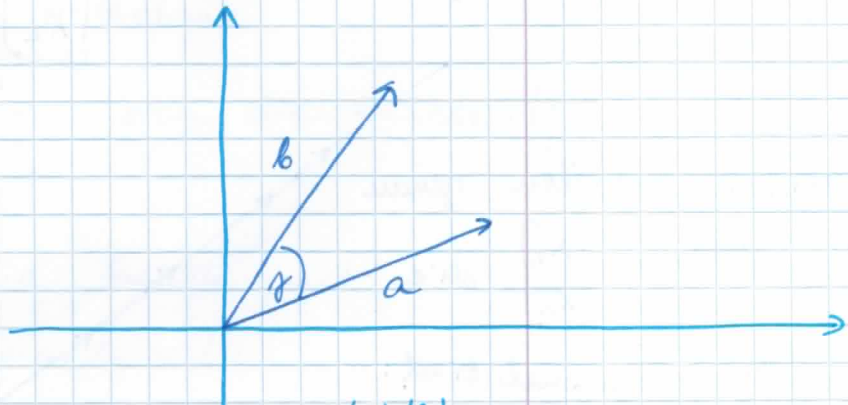
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

– das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren

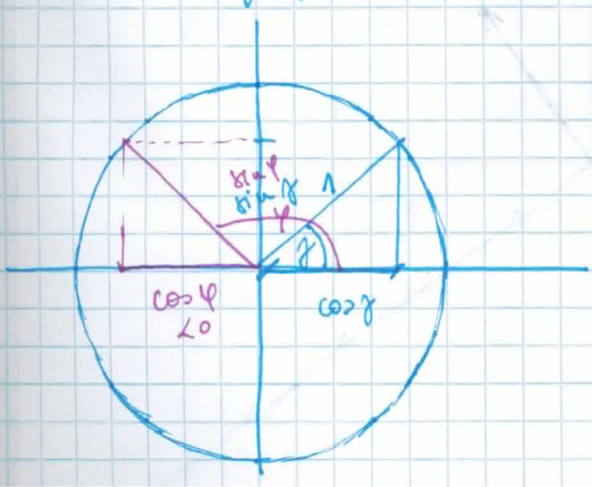
$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a^T \cdot b = [a_1 \; a_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = (b^T \cdot a)$$

diese Zahl (Skalar) gleicht $a^T \cdot b = b^T \cdot a = |a| \cdot |b| \cdot \cos \gamma$



Zur Erinnerung: für $0 \leq \gamma \leq 180^\circ$



deshalb $a^T \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \gamma = 0$

$\Updownarrow$

$\underbrace{a = 0 \text{ oder } b = 0 \text{ oder } (\cos \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ (\pm k}$

dann sagen wir: a und b sind <u>orthogonal</u>

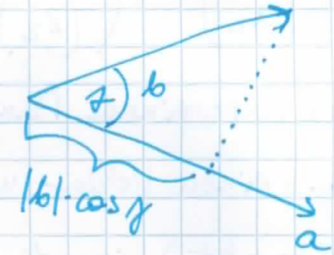
(teste das Skalarprodukt von $a=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

und von $a=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$)

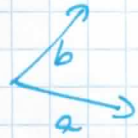
– für $|a|=1$ ist $a^T\cdot b=|b|\cdot\cos\gamma$

die Länge der Projektion

von b auf a



– Wann gilt $a^T\cdot b>0$? Falls $\cos\gamma>0 \iff \gamma<90^\circ$



$a^T\cdot b<0$ falls $\cos\gamma<0 \iff 90^\circ<\gamma\leq 180^\circ$

– sei $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ fixiert (z.B. $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$)

Wo sind all die Punkte $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ so dass $a^T\cdot x=0$?

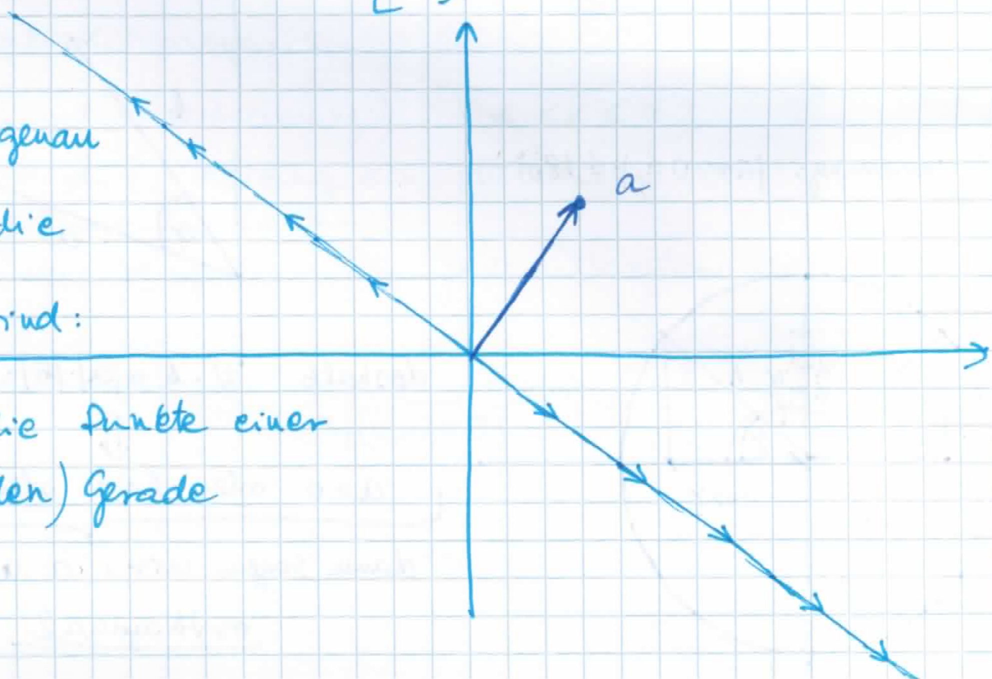
$a^T\cdot x=0$ erfüllen genau

die Vektoren $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ die

zu $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ orthogonal sind:

die sind genau die Punkte einer

(die 0 enthaltenden) Gerade



also: $a^T \cdot x = 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 \cdot x_2 = 0$ ist die

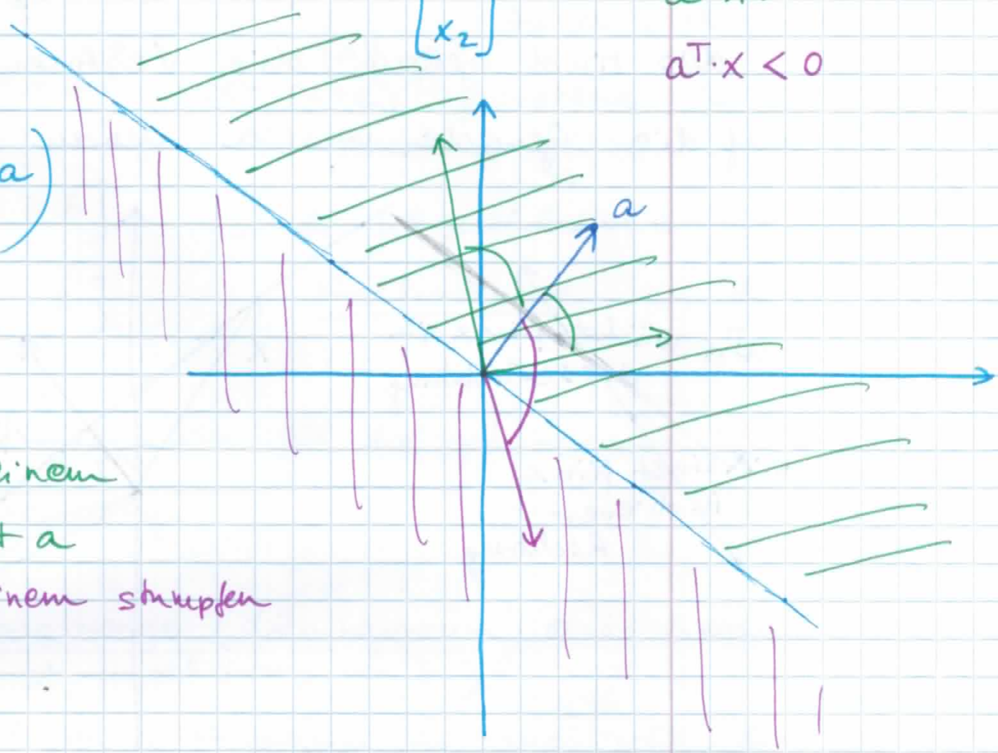
Gleichung einer zu $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ orthogonalen Gerade über $\underline{0}$.

(die Lösungen x zu $a^T \cdot x = 0$ bilden eine Gerade)

– Wo befinden sich die Punkte $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ mit $a^T \cdot x > 0$

$a^T \cdot x < 0$

($a^T \cdot x$ wächst in Richtung a und sinkt in Richtung $-a$)



die Vektoren mit einem spitzen Winkel mit a

die Vektoren mit einem stumpfen Winkel mit a

– die Punkte x mit $a^T \cdot x > 0$ (bzw. $a^T x < 0$) entsprechen einer offenen Halbebene

(die Lösungen x zu $a^T \cdot x \geq 0$ bilden eine Halbebene)

– die Punkte x mit $a^T \cdot x \geq 0$ (bzw. $a^T \cdot x \leq 0$) entsprechen einer abgeschlossenen Halbebene

---

– Insbesondere wo befinden sich die Punkte $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ mit $a^T \cdot x = 10$

Also, wo sind die Punkte mit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 10$$

z.B. $3x_1 + 4x_2 = 10$

Diese Punkte x formen auch eine Gerade, aber wo?

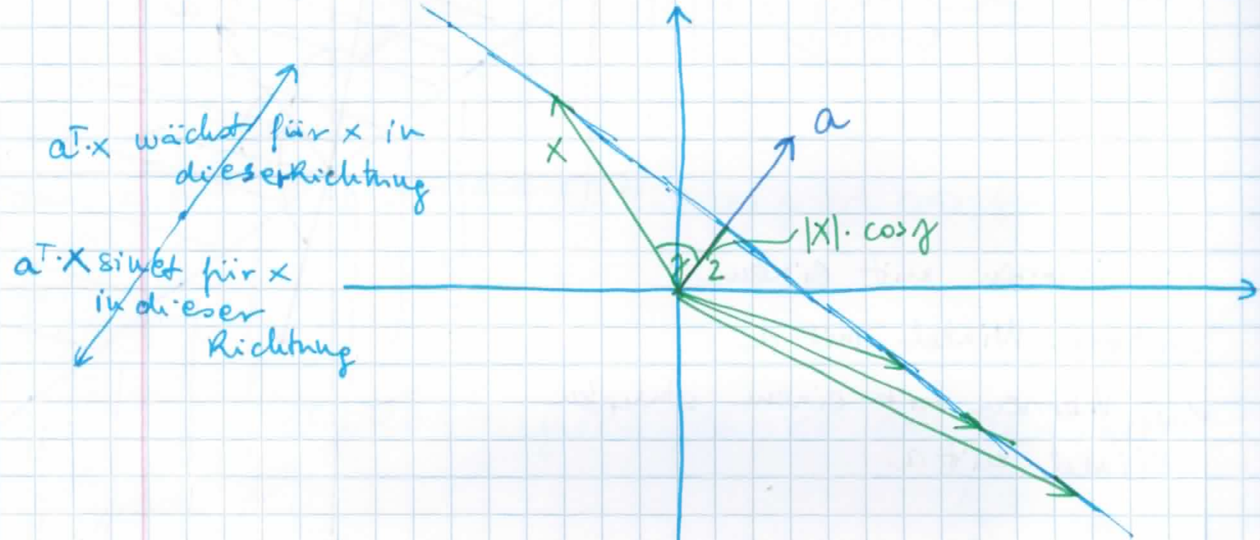
$a^T\cdot x = |a|\cdot|x|\cdot\cos\gamma = 10$ $\qquad \gamma = \sphericalangle(x,a)$

$|a| = \sqrt{9+16} = 5$

Also wir suchen alle x Punkte mit

$$|x|\cdot\cos\gamma = \frac{10}{5} = 2$$

das sind genau die Vektoren, deren Projektion auf die Gerade von a genau 2 ist.



– Sei $b\in\mathbb{R}$ Die Punkte $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ mit $a^T\cdot x = b$ formen eine Gerade, parallel mit der Gerade $a^T\cdot x = 0$

---

ii.) Zusammenfassung + Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$
(wir denken an $\mathbb{R}^3$)

– $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ $\quad a = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ usw. ist ein Vektor, bzw. dessen Endpunkt in $\mathbb{R}^n$

– $a^T\cdot x = |a|\cdot|x|\cdot\cos\gamma$ wobei γ der von a und x geschlossene Winkel ist.

(in DIM ≥ 4 wird γ so **definiert**: $\arccos\dfrac{a^T\cdot x}{|a|\cdot|x|}$)

– Wir definieren die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^n$ sei $a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = 0\}$ (sind all die Vektoren, die auf a orthogonal sind)

ist eine Hyperebene (in $\mathbb{R}^3$ eine Ebene) die $\underline{0}$ enthält zu a orthogonal

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = b\}$ ist eine (affine) Hyperebene in $\mathbb{R}^n$
(Verschiebung der obigen Menge)

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \geq b\}$ sind abgeschlossene
und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \leq b\}$ Halbräume in $\mathbb{R}^n$

das alles brauchen wir für die geometrische Interpretierung der Lösungsmenge:

(ii.) Die Lösungsmenge (Lösungsraum) eines linearen Programms (ist unabhängig von c)

Sei $Ax \geq b$ ein lineares Programm in kanonischer Form (mit der zu minimierenden Zielfunktion $c^T x$)
Ein Vektor x mit $Ax \geq b$ heißt eine Lösung.
Das lineare Programm ist lösbar wenn Lösungen existieren, ansonsten ist es unlösbar. Die Lösungsmenge ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

Wie sieht im Allgemeinen so eine Lösungsmenge aus?

Die Menge aller Lösungen von einer Nebenbedingung $a_1^T \cdot x \geq b_1$ ist ein (abgeschlossener) Halbraum.
Die Lösungsmenge aller Nebenbedingungen ist also ein Durchschnitt von Halbräumen. Ein Durchschnitt von Halbräumen ist ein (konvexer) Polyeder (oder Polytop wenn er beschränkt ist).

<u>Beobachtung</u>: Die Lösungsmenge ist ein Polyeder, weil sie der Durchschnitt der Halbräume

$\{x \mid a_i^T \cdot x \geq b_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$ ist, wobei a_i^T die

i-te Zeile der Matrix A ist.

<u>Beispiel</u>: Minimiere $-x_1 - x_2$

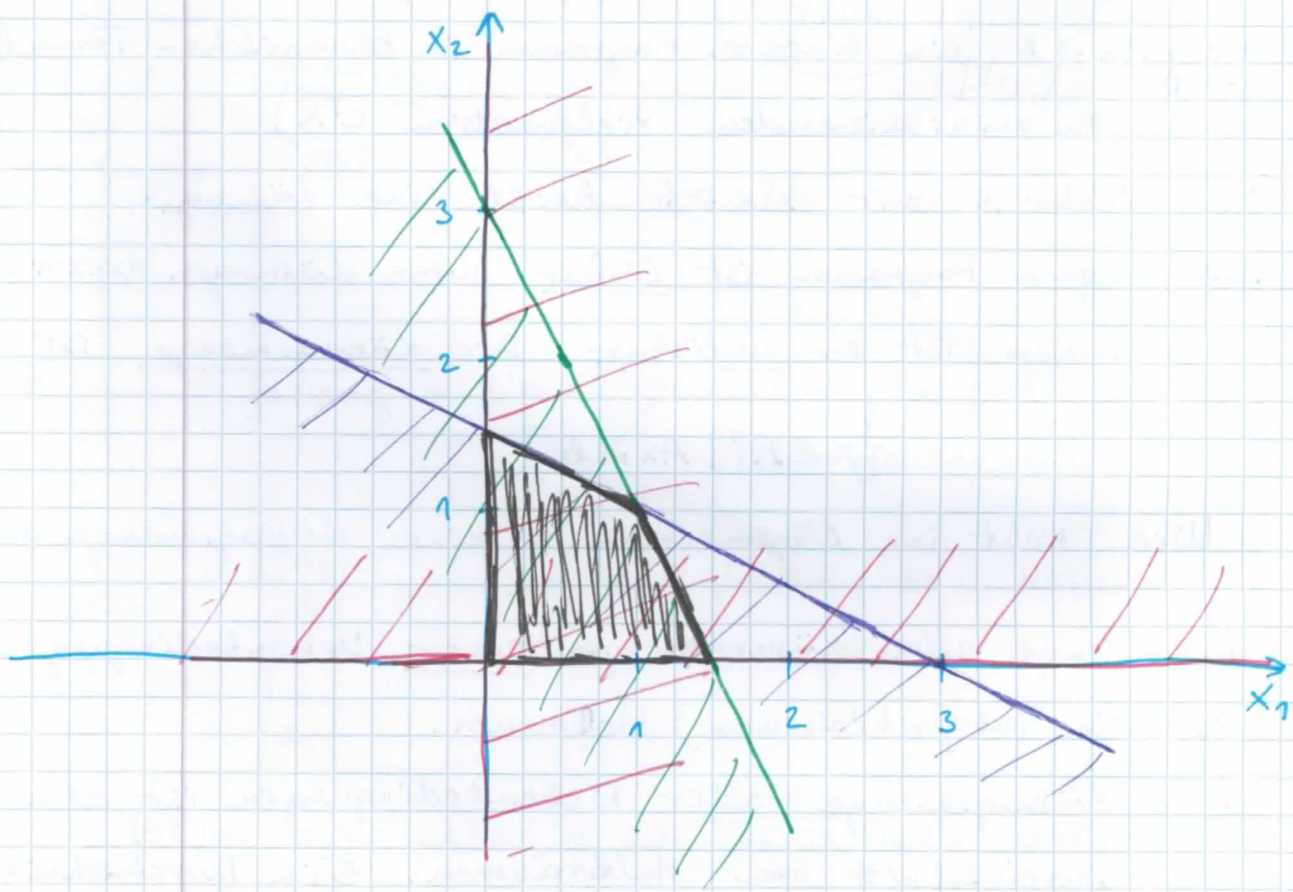
so dass $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

<u>1. Wir stellen die Lösungsmenge dar</u> in $\mathbb{R}^2$ weil $n = 2$



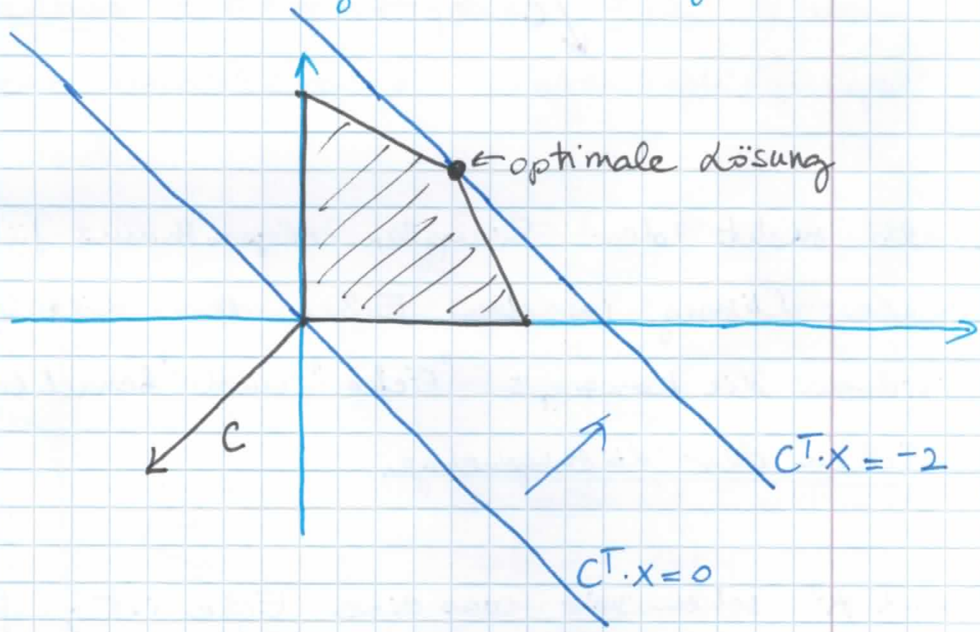
2. Für welche Lösung ist $-x_1 - x_2$ minimal?

Wir minimieren $c^T \cdot x$ wobei $c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$c^T \cdot x = 0$ ist eine Gerade die $\underline{0}$ enthält, und zu $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal ist

$c^T \cdot x = \alpha$ ist eine parallele Verschiebung dieser Gerade nach 'oben' (Richtung $-c$) wenn $\alpha < 0$ und in Richtung c für $\alpha > 0$.

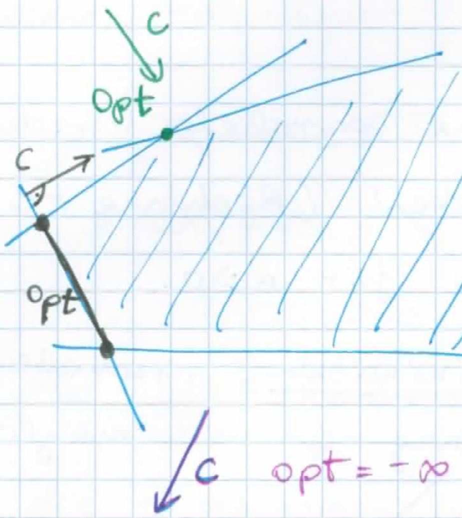
Um $c^T \cdot x$ zu <u>minimieren</u>, verschieben wir die Gerade so weit in Richtung $-c$ wie möglich:



Offensichtlich wird $c^T \cdot x$ in der Ecke $x = (1,1)$ $\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ der Lösungsmenge minimiert, und hier gilt

$c^T \cdot x = -2$

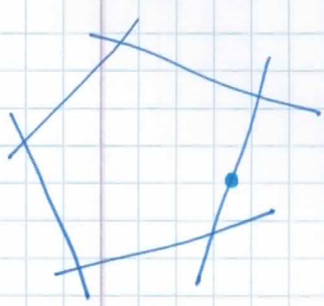
- Allgemein gilt, dass wenn der Lösungsraum nichtleer ist, (und mindestens eine Ecke hat), dann entweder ist das Minimum $-\infty$, oder ~~…~~ es ist endlich, und wird (auch) in einer Ecke des Lösungsraums angenommen. (s.a. später)

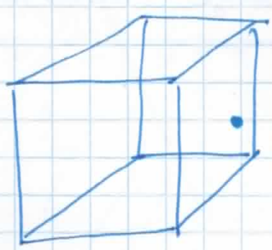


- deshalb sucht der Simplex-Algorithmus für LP die optimale Lösung in den Ecken der Lösungsmenge. Wir formalisieren die Konzepte "Ecke" und "benachbarte Ecken".

Die Ecken der Lösungsmenge

in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sehen wir was eine Ecke ist; für den Algorithmus und für $\mathbb{R}^n$ allgemein brauchen wir eine algebraische Definition:





- Wie können wir die Lösungen (algebraisch) erkennen, die sich am Rand (Seitenfläche, Kante, Ecke) befinden?

→ es gibt mindestens eine Nebenbedingung $a_i^T \cdot x \geq b_i$ die exakt (mit Gleichung) erfüllt wird.

– Wieviele Nebenbedingungen müssen exakt erfüllt werden, um eine <u>Ecke</u> zu erhalten?

→ n linear unabhängige Nebenbedingungen (wobei n die Anzahl der Variablen ist) also wir suchen die Lösungsvektoren x im n-dim Raum $\mathbb{R}^n$

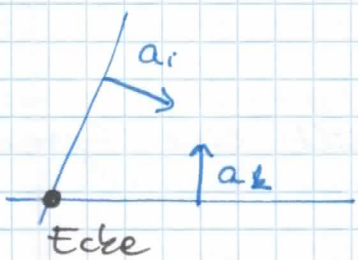
<u>Definition 1:</u> Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ das Lösungspolyeder zu einem LP. Eine <u>Lösung</u> $x^* \in P$ ist eine <u>Ecke</u>, wenn in x^* n linear unabhängige Nebenbedingungen exakt erfüllt werden.

($a_i^T \cdot x \geq b$ und $a_k^T \cdot x \geq b_k$ sind linear unabhängige Nebenbedingungen genau dann wenn a_i und a_k linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind)

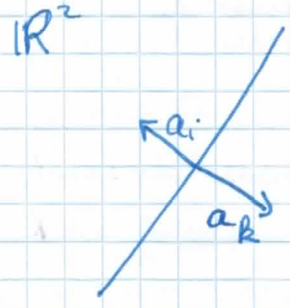
↓

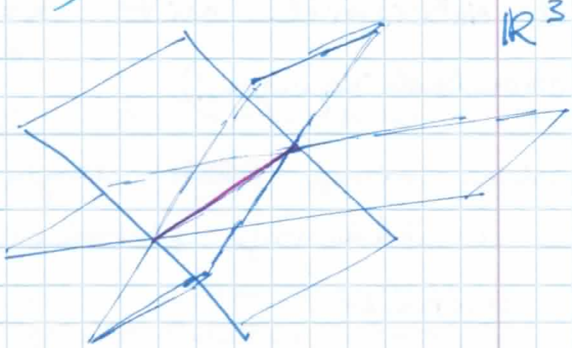
bei <u>mehr</u> als 2 Nebenbedingungen, soll die entsprechende Teilmenge von Zeilenvektoren a_i^T eine linear unabhängige <u>Menge</u> von Vektoren sein!

Bsp.

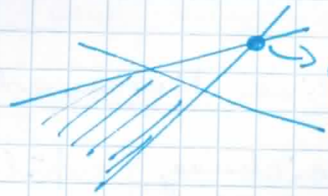


– Beispiele für linear <u>abhängige</u> Nebenbedingungen (die keine Ecke ergeben) obwohl die Lösungsmenge nicht leer ist





- die Forderung $x^* \in P$ ist wichtig:



keine Ecke der Lösungsmenge

- eine alternative Definition für Ecken:

<u>Definition 2:</u> $x^* \in P$ ist eine <u>Ecke</u>, wenn es keinen Vektor $y \neq 0$ gibt so dass $x^* + y \in P$ und $x^* - y \in P$

(beachte, dass es sonst (für nicht-Ecken) einen solchen Vektor y immer gibt)

Bemerkung: Damit der Lösungsraum Ecken überhaupt <u>enthält</u>, braucht man also n linear unabhängige Nebenbedingungen a_i

(falls es $< n$ unabhängige Bedingungen gibt insgesamt

$\Updownarrow$

der Lösungsraum enthält eine Gerade

$\Downarrow$

es kann vorkommen, dass ein <u>endliches</u> Optimum in keiner Ecke angenommen wird

(finde ein Beispiel mit $n = 3$ und nur 2 Nebenbedingungen!))

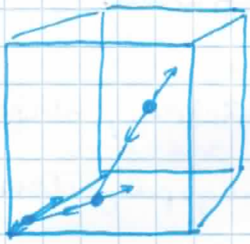
Im Folgenden wird stets angenommen, dass das LP n linear unabhängige Nebenbedingungen (und noch weitere) enthält.

Dies ist keine starke Einschränkung, da zB. die Standardform, (die wir bald kennenlernen) sie stets erfüllt, und jedes LP ein äquivalentes LP in Standardform hat.

<u>Theorem:</u> Wenn für ein LP mit n Variablen, und n linear unabhängigen Nebenbedingungen ein endliches Optimum existiert, dann gibt es eine <u>optimale Ecke</u> des Lösungspolyeders. (Ein Alg. braucht also nur Ecken der Lösungsmenge ~~zu~~ besuchen, und dies sogar nur "in Richtung" $-c$ tun!)

[Warum? (beide Definitionen einer Ecke werden benutzt)

sei P das Lösungspolyeder



- sei $x \in P$ eine optimale Lösung ($c^T \cdot x$ minimal)
- falls x eine Ecke $\rightarrow$ fertig
- sonst gibt es ein y sodass $x+y \in P$ und $x-y \in P$

- es gilt $c^T \cdot (x+y) = c^T \cdot x = c^T \cdot (x-y)$

  oder $c^T \cdot (x+y) > c^T \cdot x > c^T \cdot (x-y)$

  oder $c^T (x+y) < c^T \cdot x < c^T \cdot (x-y)$

  (je nachdem ob wir von der Hyperebene $c^T \cdot x = 0$ uns entfernen oder näher kommen)

  Die beiden letzten Fälle sind ausgeschlossen, weil x schon optimal war, also $x+y$ und $x-y$ sind auch optimal

- P enthält keine Gerade (nach Annahme) also entweder in Richtung y oder in Richtung $-y$ erreichen wir eine (neue) Bedingung die exakt erfüllt wird. Entweder sind wir in einer Ecke, oder wir machen weiter mit neuem y
- wenn n Bedingungen exakt erfüllt werden, sind wir in opt. Ecke]