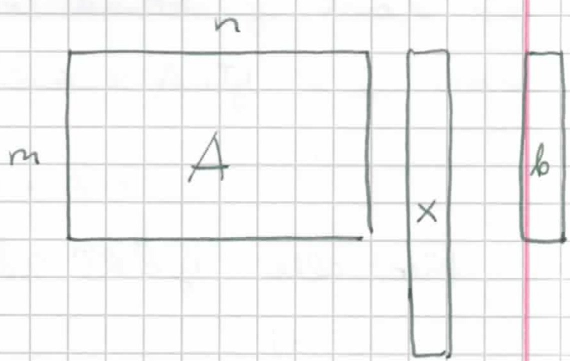
g.) Dualität in der Linearen Programmierung

i.) Einführung

Beispiel: Sei das folgende LP gegeben (wir nennen ihn (P)):

(P) minimiere $c^T \cdot x$ so dass $A \cdot x \geq b$ und $x \geq 0$



I.

Für beliebigen nichtnegativen m-dimensionalen Vektor $y \geq 0$

$$y^T = (y_1 \; y_2 \; \dots \; y_m) \quad (y_i \geq 0 \;\forall i)$$

und jede Lösung x gilt dann

(denke an y_i und x_j als an Zahlen)

$$b \leq A \cdot x$$

$$y^T \cdot b \leq y^T \cdot A \cdot x$$

($b \leq A \cdot x$ ist die kurze Form der Ungleichungen

$$b_1 \leq a_1^T \cdot x = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j$$

$$b_2 \leq a_2^T \cdot x$$

$$\vdots$$

$$b_m \leq a_m^T \cdot x$$

Wenn die i-te Ungleichung durch $y_i \geq 0$ multipliziert wird, erhalten wir $y_i \cdot b_i \leq y_i \cdot (a_i^T \cdot x)$

Wenn die letzteren m Ungleichungen dann summiert werden:

$$y^T \cdot b = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \leq \sum_{i=1}^{m} y_i (a_i^T \cdot x) = y^T \cdot A \cdot x$$)

II. Für jede Lösung x von (P) gilt $x \geq 0$.

Wenn noch für ein $y \geq 0$ auch $y^T \cdot A \leq c^T$ gilt, dann

$$y^T \cdot A \cdot x \leq c^T \cdot x$$

Also, für alle $y \in \mathbb{R}^m$ so dass $y \geq 0$ und $y^T A \leq c^T$

$$y^T \cdot b \leq y^T \cdot A \cdot x \leq c^T \cdot x$$

dh. $y^T \cdot b$ ist eine untere Schranke für jeden (auch für den optimalen) Zielwert von (P)

Suchen wir eine beste (höchste) solche untere Schranke, dann müssen wir das folgende Problem lösen:

$$\text{(D)} \quad \begin{aligned} &\text{maximiere} \quad y^T \cdot b \\ &\text{so dass} \quad y^T \cdot A \leq c^T \\ &\text{und} \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Das ist auch ein LP, wir nennen ihn (D)

(P) steht für 'Primal', (D) steht für 'Dual'

(Statt $y^T \cdot b$ hätten wir ruhig $b^T \cdot y$ und statt $y^T \cdot A \leq c^T$ $A^T \cdot y \leq c$ schreiben können, da y die Variablen von (D) enthält. Es wird bequemer jedoch mit der Notation y^T zu bleiben.)

Was hätte sich im obigen Argument geändert, wenn wir weiterhin $y^T \cdot b \leq c^T \cdot x$ gewollt hätten,

aber im (P)... in (D)

(statt $Ax \geq b$)

→ $Ax \leq b$ steht → dann sollte $y \leq 0$ sein, so gilt
$y^T \cdot b \leq y^T \cdot A \cdot x$ in I.

→ $Ax = b$ steht → dann hätte y keine Vorzeichenbedingung, und in I wäre

$$b = A \cdot x$$
$$y^T \cdot b = y^T \cdot A \cdot x$$

(statt $x \geq 0$)

→ $x \leq 0$ steht → dann in II. würde man
$y^T \cdot A \geq c^T$ fordern, und so
$y^T \cdot A \cdot x \leq c^T \cdot x$ würde gelten

→ x ohne Vorzeichenbedingung. → dann würde man in II
$y^T \cdot A = c^T$ fordern, und
$y^T \cdot A \cdot x = c^T x$ würde gelten

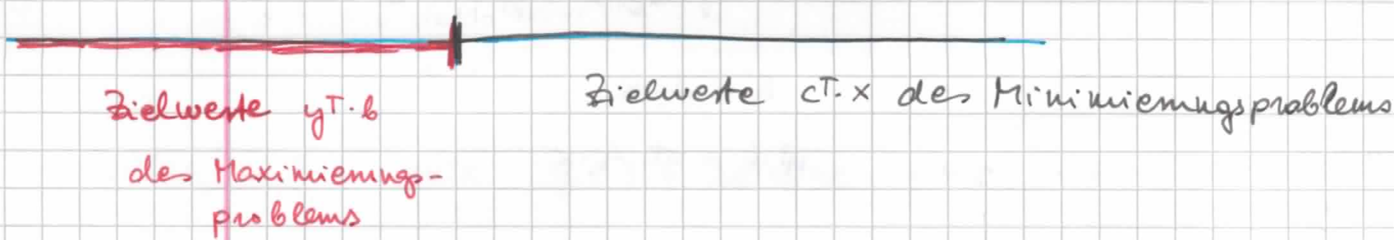
LPD 4.

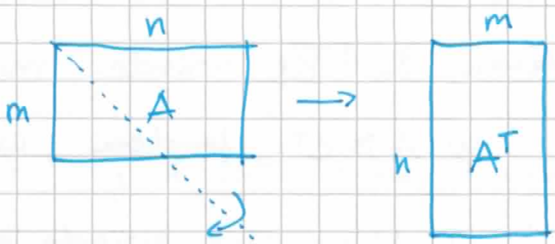
Wir sehen: Lineare Programme treten in Paaren auf!

Zu jedem LP Minimierungsproblem gehört ein Maximierungsproblem mit der transponierten (gespiegelten) Matrix, so dass jede Lösung y des Maximierungsproblems hat einen Zielwert ≤ als jede Lösung des Minimierungsproblems; es gilt sogar: die optimalen Zielwerte sind gleich

↓

nicht trivial, siehe später





ii.) Das duale LP zu einem LP in Standardform

(Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ c, x n-dimensional b m-dimensional)

Zu dem primalen LP

(P) minimiere $c^T \cdot x$ s.d. $Ax = b$ $x \geq 0$

gehört das duale LP

(D) maximiere $y^T \cdot b$ s.d. $y^T \cdot A \leq c^T$

mit $y^T = (y_1\, y_2 \ldots y_m)$

(Statt A zu transponieren, wird y^T von links mit A multipliziert)

Beispiel 1: Minimiere $13x_1 + 10x_2 + 6x_3$

so dass
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\downarrow$

(P) $$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

(D) maximiere $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

s.d. $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

maximiere $8y_1 + 3y_2$

so dass
$$5y_1 + 3y_2 \leq 13$$
$$y_1 + y_2 \leq 10$$
$$3y_1 \leq 6$$
$$y_1\ y_2 \text{ frei}$$

Beachte: Jede Bedingung $a_i^T \cdot x = b_i$ im (P) entspricht einer Variable y_i in (D); (die m Zeilen von A)

jede Variable $x_j \geq 0$ in (P) entspricht einer Bedingung $y^T \cdot a^j \leq c_j$. (die n Spalten von A)

<u>Bemerkung:</u> (P) und (D) (in der Standardform)

können in der folgenden kompakten Form

ausgedrückt werden:

(D) bestimme $\max_{y} \min_{x \geq 0} \left(c^T \cdot x + y^T \cdot b - y^T \cdot A \cdot x \right)$

(P) bestimme $\min_{x \geq 0} \max_{y} \left(c^T \cdot x + y^T \cdot b - y^T \cdot A \cdot x \right)$

(Übrigens: dasselbe gilt für beliebiges (P) und (D) Paar mit den nötigen Einschränkungen für x und y in min und max)

<u>Warum</u>?

Wir zeigen für die Standardform:
für (D)

$$(*) \quad \min_{x \geq 0} \left(c^T \cdot x + y^T \cdot b - y^T \cdot A \cdot x \right) = y^T \cdot b + \min_{x \geq 0} \left(c^T - y^T \cdot A \right) \cdot x$$

$$\min_{x \geq 0} \left(c^T - y^T \cdot A \right) \cdot x = \begin{cases} 0 & \text{falls } c^T - y^T A \geq 0 \\ & \text{d.h. } c_j - y^T \cdot a^j \geq 0 \ \forall j \\ -\infty & \text{sonst} \\ & \text{d.h. wenn } c_j - y^T \cdot a^j < 0 \\ & \text{für mind. ein } j \end{cases}$$

Deshalb $$(*) = \begin{cases} y^T \cdot b & \text{falls } c^T - y^T \cdot A \geq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Maximieren von $(*)$ über alle y bedeutet somit:

"maximiere $y^T \cdot b$ unter allen y so dass $c^T \geq y^T \cdot A$."

Also: Für eine optimale duale Lösung y^*

$$y^{*T} \cdot b = \max_{y} \min_{x \geq 0} \left(y^T \cdot b + c^T \cdot x - y^T \cdot A x \right)$$

Analog gilt: Für eine optimale primale Lösung x^*

$$c^T \cdot x^* = \min_{x \geq 0} \max_{y} \left(y^T \cdot b + c^T \cdot x - y^T \cdot A \cdot x \right)$$

(überlege den analogen Beweis für $c^T \cdot x^*$)

---

iii.) Zusammenfassung; die allgemeine Form von (P) und (D)

Wir haben in der Einführung gesehen, wie die (Un)gleichungen in den Bedingungen den dualen Vorzeichenbedingungen entsprechen, und umgekehrt. Diese Regel können sogar Zeile für Zeile bzw. Spalte für Spalte verwendet werden. Als Konvention, nehmen wir (hier) an, dass (P) ein Minimierungsproblem, und (D) ein Maximierungsproblem ist (nicht wesentlich), dann gilt die allgemeine Definition in folgender Form:

	(P)	(D)	
minimiere	$c^T \cdot x$	maximiere	$y^T \cdot b$
so dass	$a_i^T \cdot x \geq b_i$	so dass	$y_i \geq 0$
Zeilen	$a_i^T \cdot x \leq b_i$		$y_i \leq 0$
	$a_i^T \cdot x = b_i$		y_i frei
	$x_j \geq 0$		$y^T \cdot a^j \leq c_j$
Spalten	$x_j \leq 0$		$y^T \cdot a^j \geq c_j$
	x_j frei		$y^T \cdot a^j = c_j$

Jede Variable y_i in (D) entspricht einer Bedingung in (P), und jede Bedingung in (D) entspricht einer Variable x_j. Weiterhin werden die Bedingungen so definiert, dass

$$\boxed{\begin{gathered} (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j \geq 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \text{und} \\ y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{gathered}}$$

LPD 8.

Als die Summe dieser Terme über alle j bzw. über alle i erhalten wir jeweils

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j - y^T a^j)\cdot x_j = \boxed{(c^T - y^T\cdot A)\cdot x \geq 0}$$

(❀)

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\cdot(a_i^T\cdot x - b_i) = \boxed{y^T\cdot(A\cdot x - b) \geq 0}$$

für beliebige Lösungen x für (P) und y für (D)

Die beiden Ungleichungen ergeben den schwachen Dualitätssatz $c^T x \geq y^T\cdot b$ (siehe später)

Beobachtungen:

1. Das duale LP des dualen LP (D) ist das primale LP (P).

2. Wenn wir das primale LP (P) in ein äquivalentes LP transformieren (z.B. durch die Einführung von Slackvariablen, die Eliminierung von linear abhängigen Gleichungen, usw.), dann ist das duale LP des so erhaltenen LP äquivalent mit dem dualen von (P).

Beispiel 2. Bestimme das Duale (D) von

(P)

Minimiere $-5x_1 - 6x_2 - 4x_3$

so dass
$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$
$$-3x_1 + x_2 \leq -2$$
$$-3x_2 - x_3 = -3$$
$$x_1 \text{ frei}$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0$$

	frei x_1	$0 \leq x_2$	$0 \geq x_3$		b
$y_1 \geq 0$	1	-2	0	$\geq$	-1
$y_2 \leq 0$	-3	1	0	$\leq$	-2
y_3 frei	0	-3	-1	$=$	-3
	$=$	$\leq$	$\geq$		
c^T	-5	-6	-4		

(D)

Maximiere $-y_1 - 2y_2 - 3y_3$

so dass
$$y_1 - 3y_2 = -5$$
$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq -6$$
$$-y_3 \geq -4$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_3 \text{ frei}$$

LPD 10.

IV.) Dualitätssätze

Schwache Dualität:

Theorem: Wenn x eine Lösung des primalen LP, und y eine Lösung des dualen LP ist, dann gilt

$$y^T \cdot b \leq c^T \cdot x$$

Beweis: Laut Definition von (D) gelten die Ungleichungen (✿), deshalb $c^T \cdot x \geq y^T \cdot A \cdot x \geq y^T \cdot b$ für beliebige Lösungen x und y von (P) bzw. (D) □

Korollar 1: Wenn für die Lösungen x und y von (P) bzw. (D) $y^T \cdot b = c^T \cdot x$ gilt, dann sind x und y optimale Lösungen von (P) bzw. von (D).

Warum? Laut schwache Dualität ist $y^T \cdot b$ eine untere Schranke für den Zielwert für alle x in der Lösungsmenge von (P), also wenn $y^T \cdot b = c^T \cdot x$, dann ist $c^T \cdot x$ minimal. Analog: $y^T \cdot b$ ist maximal.

Korollar 2: Wenn das Minimum im primalen LP $-\infty$ ist, dann ist das duale LP unlösbar, wenn das Maximum des dualen LP ∞ ist, dann ist das primale LP unlösbar.

Starke Dualität:

Theorem: Wenn ein lineares Programm eine (endliche) optimale Lösung x^* hat, dann hat sein duales Programm auch eine optimale Lösung y^*, und

$$y^{*T} \cdot b = c^T \cdot x^*$$

(P) ist dabei ein Minimierungsproblem oder ein Maximierungsproblem
alles ist symmetrisch

~~Der Vollständigkeit halber wird der Beweis hier später aufgeführt.~~ Statt Beweis, zeigen wir zunächst zwei Illustrationen zum starken Dualitätssatz.

Illustration 1: → In der Bemerkung haben wir gesehen, dass für (P) in Standardform, das Optimum $y^{*T}\cdot b$ von (D) ist

$$y^{*T}\cdot b = \max_{y} \min_{x\geq 0} \left(c^T\cdot x + y^T\cdot b - y^T\cdot A\cdot x\right)$$

und das Optimum $c^T\cdot x^*$ von (P) ist

$$c^T\cdot x^* = \min_{x\geq 0} \max_{y} \left(c^T\cdot x + y^T\cdot b - y^T\cdot A\cdot x\right)$$

→ (Seien $S\subseteq \mathbb{R}^n$ und $T\subseteq \mathbb{R}^m$) Für beliebige Funktion $f: S\times T \to \mathbb{R}$ gilt trivial (siehe Übung)

$$\max_{y\in T} \min_{x\in S} f(x,y) \leq \min_{x\in S} \max_{y\in T} f(x,y)$$

(dies würde bei unserem Fall also $y^{*T}\cdot b \leq c^T\cdot x^*$ ergeben)

→ Für eine lineare Funktion f und gut gewählte S und T gilt aber sogar

$$\max_{y} \min_{x} f(x,y) = \min_{x} \max_{y} f(x,y)$$

Siehe die 3D Fläche (Graph) einer bivariaten linearen Funktion $g(x,y) = c\cdot x + by + a\cdot x\cdot y$ die dem Fall $n=m=1$ entspricht, und seien $S\subseteq\mathbb{R}$ und $T\subseteq\mathbb{R}$ Intervalle

Zusammenfassung:

Der schwache u. starke Dualitätssatz lässt die folgenden Möglichkeiten zu:

(D) \ (P)	endliches OPT	OPT $= -\infty$	unlösbar
endliches OPT	+		
OPT $= \infty$			+
unlösbar		+	+

(Ein Beispiel in dem (P) und (D) beide unlösbar sind:

(P)

$$\text{minimiere} \quad x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.d.} \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

(D)

$$\text{maximiere} \quad y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.d.} \quad y_1 + 2y_2 = 1$$

$$y_1 + 2y_2 = 2 \quad)$$

V.) Komplementäre Slackness

Wir betrachten wieder die Ungleichungen die für jedes (P)–(D) Paar gelten sollen für jede Lösung x von (P) und jede Lösung y von (D):

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

und

$$y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \dots, m$$

Der Beweis der schwachen Dualität war im Grunde genommen

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = \sum_{j=1}^{n} (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0$$

Hier gilt also ≥ 0 für jeden der $n+m$ Summanden einzeln! Dies impliziert, dass x und y genau dann **beide** optimal sind, d.h. $c^T \cdot x = y^T \cdot b$ genau dann gilt, wenn

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0 \qquad \text{für alle } j$$

$$\text{und } y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) = 0 \qquad \text{für alle } i$$

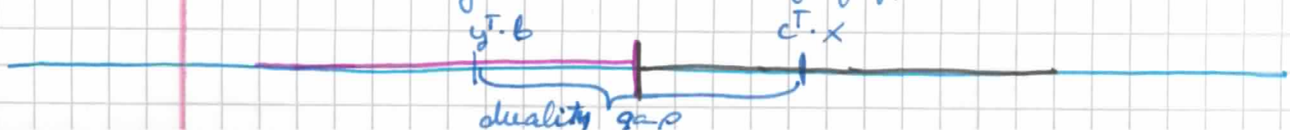
$\Updownarrow$

PKS: Für alle j: entweder $x_j = 0$ oder die entsprechende duale Ungleichung $c_j \geq y^T \cdot a^j$ exakt erfüllt wird $c_j = y^T \cdot a^j$

DKS: und analog für alle i: entweder $y_i = 0$ oder $a_i^T \cdot x = b_i$

Diese Bedingungen nennt man Komplementäre Slackness Bedingungen (complementary slackness conditions)

Für beliebige Lösungen x und y, die Dualitätslücke ist $c^T \cdot x - y^T \cdot b$ (duality gap)



vi.) Primal-duale Algorithmen (siehe Vazirani)

Diese Beobachtungen werden in den sogenannten <u>primal-dualen Algorithmen</u> benutzt. In diesen Heuristiken werden iterativ y und x <u>Vektoren</u> definiert, so dass die Dualitätslücke letztendlich möglichst klein wird, und die letzten x und y <u>Lösungen</u> von (P) bzw. von (D) sind. Wenn am Ende solche x und y gefunden werden, dass x <u>ganzzahlig</u> (also "echte" Lösung für das ursprüngliche kombinatorische Problem) ist, und

$$c^T \cdot x \leq \alpha \cdot y^T \cdot b \quad \text{für irgendein } \alpha,$$

dann ist x eine α-approximative ~~...~~ Lösung des IP, weil $c^T \cdot x \leq \alpha \cdot y^T \cdot b \leq \alpha \cdot OPT_{(P)} \leq \alpha \cdot OPT_{IP}$

→ diese Algorithmen sind relativ schnell und einfach

→ oft versucht der Algorithmus eine ganzzahlige x Lösung Schritt für Schritt so zu definieren, dass $x_j \neq 0$ nur dann gilt, wenn für die aktuelle y $(c_j - y^T \cdot a^j) = 0$ gilt. So werden zumindest die <u>primalen komplementäre Slackness Bedingungen</u> $(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0$ die ganze Zeit gelten (die dualen nicht, x wird kein Optimum des LP werden können) und man kann hoffen, dass $y^T \cdot b$ und $c^T \cdot x$ nah aneinander bleiben

→ das LP wird dabei typischerweise gar nicht gelöst

Beispiel 1: Primal-dualer Algorithmus für SET COVER

Die Elemente $\{1, 2, \dots, m\}$ sind zu überdecken,
das Gewicht der Teilmenge S_j ist w_j.
Gesucht wird der charakteristische Vektor x der Überdeckung
$x_j = 1 \iff S_j$ ist in der Mengenüberdeckung $(j \in C)$

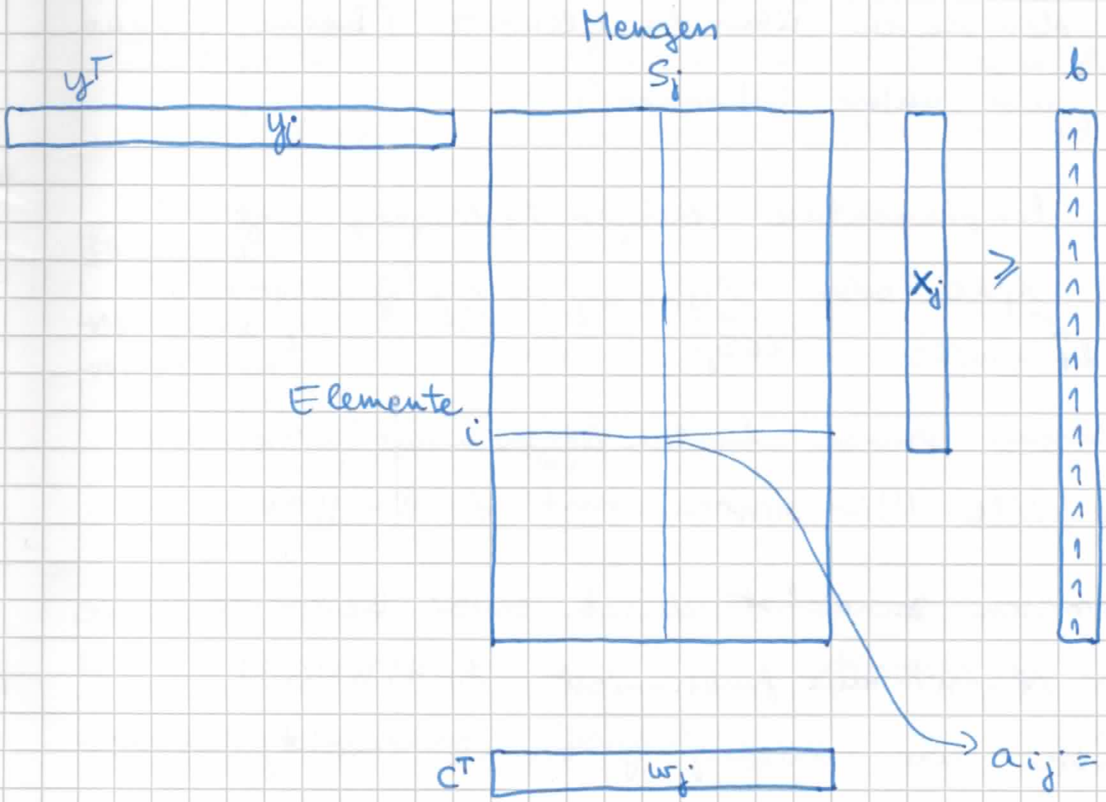
(P) „covering problem"

minimiere $\sum_j w_j x_j$

sodass $\sum_{j : i \in S_j} x_j \geq 1$ für jede $i = 1, 2, \dots, m$

$x_j \geq 0$ ($x_j \leq 1$ wird in einer optimalen Lösung sowieso erfüllt)

Was sind A, b und c?



$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in S_j \\ 0 & i \notin S_j \end{cases}$$

LPD 20. Was ist das duale Problem?

- für jedes Element i die Bedingung in (P) „überdecke i"
  entspricht einer dualen Variable $y_i \geq 0$
- maximiere $\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot 1$
- jede Teilmenge S_j (x_j) entspricht der dualen Bedingung

„packing problem"

↓

die w_j werden „vollgepackt" mit y_i

(D) $\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

Die Interpretation von y_i: „mindestens so viel kostet noch im Zielwert $\sum x_j \cdot w_j$ das überdecken vom Element i"

Unterschiedliche $y = (y_1\, y_2 \ldots y_m)$ entsprechen unterschiedlicher Aufteilung der Kosten über die Elemente (keine genaue Aufteilung, nur untere Schranke)

Die primale komplementäre Slackness Bedingung sagt:

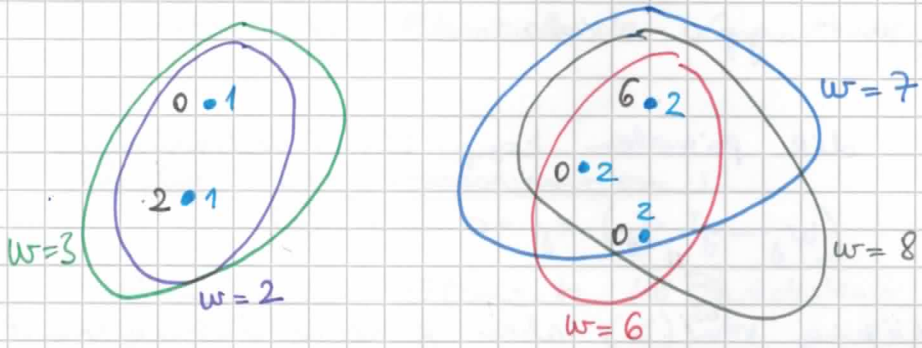
$\forall j \quad \underbrace{x_j = 0}_{S_j \text{ nicht gewählt}}$ oder $\sum_{i \in S_j} y_i = w_j \rightarrow S_j$ gewählt und w_j aufgefüllt mit Preisen

in unserem primal-dualen Algorithmus wird dies stets erfüllt. Wir starten mit $\underline{x} = \underline{0}$ $\underline{y} = \underline{0}$

Wir illustrieren zunächst durch zwei Beispiele, wie der P-D Algorithmus funktioniert. ACHTUNG!

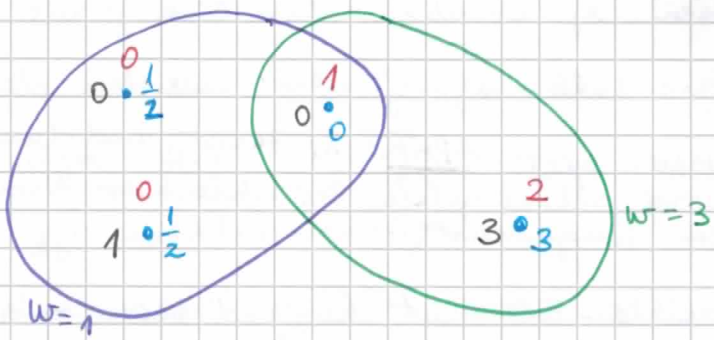
Generell wird eine Lösung y von (D) nicht iterativ gewählt, nur in diesem einfachen Algorithmus: für ein nicht-überdecktes Element i, wird y_i hochgesetzt bis ein w_j gefüllt wird. Anschließend wird S_j gewählt ($x_j = 1$ gesetzt) um i zu überdecken.

Beispiel 1. Die Elemente i werden durch y_i beschriftet für eine (optimale) Lösung y von (D).



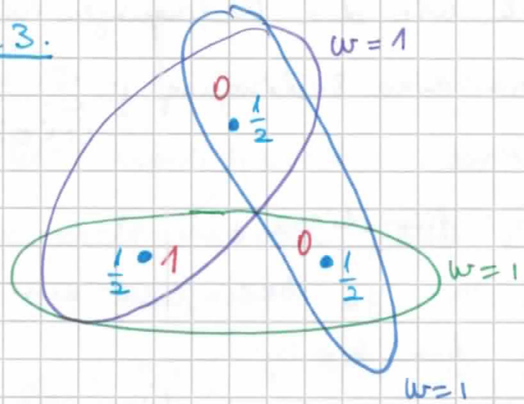
eine (optimale) Lösung y die der P-D Alg finden kann, ist schwarz

Beispiel 2.



nicht-optimales y gefunden vom P-D Algorithmus (aber die Überdeckung dh. das I.P wird hier optimal gelöst)

Beispiel 3.



Der P-D Alg. kann hier kein optimales y finden, aber die (ganzzahlige) Überdeckung die er findet (zwei Mengen) ist natürlich optimal.

LPD22.

Primal-Dualer Algorithmus für SET COVER

- starte mit $y=0$ $x=0$

es gelten die primalen komp. Slack-Bedingungen

$$(w_j - \underbrace{y^T \cdot a_j}_{\sum_{i \in S_j} y_i}) \cdot x_j = 0 \qquad (*)$$

y ist Lösung von (D) aber x keine Lösung von (P)

d.h. noch keine Mengenüberdeckung

→ $\exists\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ noch nicht überdeckt

→ wir müssen x_j erhöhen für eine j mit $k \in S_j$

→ da $x_j \neq 0$, soll $w_j - y^T \cdot a^j = 0$ werden damit

(*) weiter gilt ABER: x_j zuerst, und dann y erhöhen wird schief gehen bei schlechter Wahl von x_j!

→ wir machen umgekehrt: wir erhöhen y_k für das unbedeckte Element k, und beim ersten j wo $w_j - y^T \cdot a^j = 0$ wird, setzen wir $x_j = 1$

(dies kann nur für j mit $k \in S_j$ vorkommen)

WHILE es gibt $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ nicht überdeckt

- erhöhe y_k so hoch wie die Bedingungen in (D) erlauben, d.h. bis eine Bedingung j $\sum_{i: i \in S_j} y_i \leq w_j$ exakt erfüllt wird.

  (Dann gilt $k \in S_j$ für diese j.)

  die Erhöhung von y_k beeinflusst nur die Bedingungen j für $k \in S_j$

- setze $x_j = 1$ (wir nehmen S_j in die Überdeckung

  $(w_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0$ gilt weiterhin: „$y^T \cdot b$ ist nicht weit von $c^T \cdot x$"

- gib x als Überdeckung aus

$$C := \{ j \mid x_j = 1 \}$$

Laufzeit: $\leq m$ Iterationen, da jede Iteration mindestens ein Element der Grundmenge überdeckt.

Analyse der Approximation:

Thm: Wenn jedes Element in höchstens l Teilmengen enthalten ist, dann ist die primal-duale Lösung l-approximativ.

Beweis: Für jede S_j in der Mengenüberdeckung bezahlen wir w_j in der Zielfunktion.

Idee: Zählen wir (summieren wir) nicht alle diese w_j, sondern die $\sum_{i: i \in S_j} y_i$ für die Elemente in S_j.

Dann wird jedes y_i maximal l-mal in der Summe auftreten, weil i in höchstens l Teilmengen enthalten ist. Wir nutzen aus, dass für alle Teilmengen S_j für die $x_j = 1$ gesetzt wurde, $\sum_{i: i \in S_j} y_i = w_j$ gilt.

(diese y_i Werte werden später im Algorithmus nicht modifiziert, da diese Elemente von S_j schon überdeckt wurden, bzw. erhöhen dürfte man sie eh nicht)

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j = \sum_{j \in C} w_j = \underbrace{\sum_{j \in C} \sum_{i: i \in S_j} y_i}_{\text{die } y_i \text{ Preise werden spaltenweise summiert}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j: i \in S_j \\ j \in C}} y_i}_{\text{die } y_i \text{ werden zeilenweise summiert}} \leq \sum_{i=1}^{m} l \cdot y_i =$$

$$= l \sum_{i=1}^{m} y_i = l \cdot y^T \cdot b \leq l \cdot OPT_{frac} \leq l \cdot OPT_{ganz}$$

$\square$

die y_i Preise werden spaltenweise summiert

die y_i werden zeilenweise summiert (für jede $a_{ij} = 1$ in A)