# LINEARE PROGRAMMIERUNG

## Dualität

# LP Dualität

$$b_1 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j$$

$$b_2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j$$

$$\vdots$$

$$b_m \leq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j$$

# LP Dualität

Seien $y_i \geq 0$

$$y_1 \cdot b_1 \leq y_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j$$

$$y_2 \cdot b_2 \leq y_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j$$

$$\vdots$$

$$y_m \cdot b_m \leq y_m \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot b_i \leq \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right)$$

# LP Dualität

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{i1}\right) &\leq c_1 \\
\left(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{i2}\right) &\leq c_2 \\
&\vdots \\
\left(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{in}\right) &\leq c_n
\end{aligned}
$$

# LP Dualität

Seien $x_i \geq 0$

$$(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{i1}) \cdot x_1 \leq c_1 \cdot x_1$$

$$(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{i2}) \cdot x_2 \leq c_2 \cdot x_2$$

$$\vdots$$

$$(\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{in}) \cdot x_n \leq c_n \cdot x_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot a_{ij}) \cdot x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

# Lineare Programme treten in Paaren auf

– Zu jedem LP Minimierungsproblem gehört ein Maximierungsproblem mit der transponierten Matrix $A^T$ (oder umgekehrt)
  so dass jede Lösung $y$ des Maximierungsproblems
  hat einen Zielwert $\leq$ als jeder Zielwert des Minimierungsproblems.
– Es gilt sogar,
  dass die optimalen Zielwerte der beiden gleich sind.

# Das duale LP zur Standardform

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{Q}^m \quad c \in \mathbb{Q}^n$

Zu jedem *primalen* LP

(P) minimiere $c^T \cdot x$ so dass $A \cdot x = b \quad x \geq 0$

gehört ein *duales* LP

(D) maximiere $y^T \cdot b$ so dass $y^T \cdot A \leq c$

$(x^T = [x_1, \ldots, x_n], \quad y^T = [y_1, \ldots y_m])$

# Beispiel

(P) Minimiere $13x_1 + 10x_2 + 6x_3$

so dass

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(D) Maximiere $8y_1 + 3y_2$

so dass

$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\leq 13 \\ y_1 + y_2 &\leq 10 \\ 3y_1 &\leq 6 \\ y_1, y_2 &\ \text{frei} \end{aligned}$$

# Die allgemeine Form von primalen - dualen LPs

Sei $a_i^T$ die $i$-te Zeile
und $a^j$ die $j$-te Spalte der Matrix $A$

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimiere} & c^T \cdot x & & \\
\text{so dass} & & & \\
& a_i^T \cdot x & \geq & b_i \\
& a_i^T \cdot x & \leq & b_i \\
& a_i^T \cdot x & = & b_i \\
& x_j & \geq & 0 \\
& x_j & \leq & 0 \\
& x_j & \text{frei} &
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{llll}
\text{maximiere} & y^T \cdot b & & \\
\text{so dass} & & & \\
& y_i & \geq & 0 \\
& y_i & \leq & 0 \\
& y_i & \text{frei} & \\
& y^T \cdot a^j & \leq & c_j \\
& y^T \cdot a^j & \geq & c_j \\
& y^T \cdot a^j & = & c_j
\end{array}
$$

$$(c_j - y^T \cdot a^j)\, x_j \geq 0 \qquad \forall j = 1..n$$

$$y_i\, (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \forall i = 1..m$$

# Beobachtungen (ohne Beweis)

Beobachtung 1: Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beobachtung 2: Wenn wir (P) in ein äquivalentes LP (P') transformieren zB. durch

- die Ersetzung $x_i = x_i^+ - x_i^-$
- die Einführung von Slackvariablen
- die Eliminierung von linear abhängigen Gleichungen $a_i^T \cdot x = b_i$

dann ist auch das duale LP (D') äquivalent mit (D)

# Wie oben gesehen...

Für (P) und das duale (D) stets gilt, dass
für jede Spalte $j = 1, \ldots n$

$$(c_j - y^T \cdot a^j)\, x_j \geq 0$$

und für jede Zeile $i = 1, \ldots m$

$$y_i\, (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0.$$

Durch Summieren über $j$ bzw. $i$ ergibt dies

$$(c^T - y^T \cdot A) \cdot x \geq 0$$

$$y^T \cdot (A \cdot x - b) \geq 0$$

Wir addieren die beiden Ungleichungen, und erhalten den schwachen Dualitätssatz:

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b \geq 0.$$

# Schwacher Dualitätssatz

Theorem: Wenn $x$ eine Lösung des (primalen) Minimierungs-LP, und $y$ eine Lösung des (dualen) Maximierungs-LP ist, dann gilt

$$y^T \cdot b \leq c^T \cdot x$$

Korollar 1: Wenn für Lösungen $x$ und $y$ des primalen bzw. des dualen Programms $y^T \cdot b = c^T \cdot x$ gilt, dann sind $x$ und $y$ optimale Lösungen.

Korollar 2: Wenn das Minimum des (P) $-\infty$ ist, dann ist (D) unlösbar.

Wenn das Maximum des (D) $\infty$ ist, dann ist (P) unlösbar.

# Starke Dualität

Theorem: Wenn ein Minimierungs-LP eine optimale Lösung $x^*$ hat, dann hat sein duales LP auch eine optimale Lösung $y^*$, und

$$y^{*T} \cdot b = c^T \cdot x^*$$

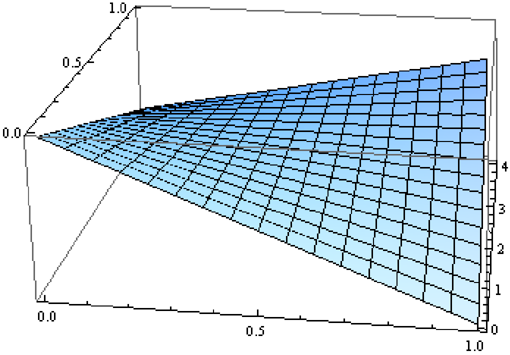
Umgekehrt gilt analog.

# Illustration

$$y^{*T} \cdot b = \max_y \min_x \left( y^T b + c^T x - y^T A x \right)$$

$$c^T \cdot x^* = \min_x \max_y \left( y^T b + c^T x - y^T A x \right)$$

Für lineare Funktion $f$ gilt $\max_y \min_x f(x, y) = \min_x \max_y f(x, y)$.




Graph von $f(x, y) = by + cx - axy$ (https://stackoverflow.com/; Suche auch 'bilinear', oder 'hiperbolic paraboloid')

# Komplementäre Slackness

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j \geq 0 \qquad \forall j, \qquad y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \forall i.$$

Summiert

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = \sum_j (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_i y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0$$

Theorem: $x$ und $y$ sind *beide* optimale Lösungen $\Leftrightarrow$

Es gelten die primalen komplementäre Slackness (PKS)

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots n$$

*und* die dualen komplementäre Slackness (DKS) Bedingungen

$$y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots m$$

Warum?
Die Lösungen $x$ und $y$ sind genau dann optimal für (P) bzw. (D) wenn

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = 0.$$

Dies passiert genau dann, wenn oben überall $=$ stehen.

# Beispiel: SET COVER (P)

(Die Elemente $\{1, \ldots, m\}$ sind minimal zu überdecken; die Teilmenge $S_j$ hat Gewicht $w_j$
$x_j = 1 \Leftrightarrow S_j \,\mathrm{in\,der\,Ueberdeckung}\, \Leftrightarrow j \in C$)

## LP-Formulierung:

$(P)$ $\qquad$ $\mathrm{minimiere} \sum w_j x_j$ so dass

$$\sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1 \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$A$ ist die Inzidenzmatrix des Mengensystems, $b^T = [1, 1, \ldots, 1]$ und $c^T = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

## Das duale LP für SET COVER:

- für jedes Element $i$, die Bedingung 'überdecke $i$' entspricht einer dualen Variable $y_i$
- für jede Teilmenge $S_j$, die Variable $x_j$ entspricht der dualen Bedingung $\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j$

$(D)$ $\quad$ maximiere $\sum y_i$ so dass

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$y_i \geq 0 \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

Die $y_i$ kann als die *Mindest*kosten (untere Schranke) der Überdeckung des Elements $i$ aufgefasst werden.

# Komplementäre Slackness

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j \geq 0 \qquad \forall j, \qquad y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \forall i.$$

Summiert

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = \sum_j (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_i y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0$$

Theorem: $x$ und $y$ sind *beide* optimale Lösungen $\Leftrightarrow$

Es gelten die primalen komplementäre Slackness (PKS)

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots n$$

*und* die dualen komplementäre Slackness (DKS) Bedingungen

$$y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots m$$

Warum?
Die Lösungen $x$ und $y$ sind genau dann optimal für (P) bzw. (D) wenn

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = 0.$$

Dies passiert genau dann, wenn oben überall $=$ stehen.

# Primal-Duale Algorithmen

- iterativ werden $y$ und $x$ Vektoren definiert
  so dass der letzte $x$ einer ganzzahligen *Lösung* entspricht;
- wenn noch
  $$c^T \cdot x \leq \alpha \cdot y^T \cdot b$$
  gilt, dann ist $x$ eine $\alpha$-approximative Lösung
- schnelle und einfache Algorithmen
- oft wird $x$ Schritt für Schritt definiert, so dass $x_j \neq 0$ nur
  dann, wenn $c_j - y^T \cdot a^j = 0$ für den aktuellen $y$ Vektor gilt.
- das heisst: die PKS Bedingungen gelten
- das LP wird dabei gar nicht gelöst

## Primal-Dual Algorithmus für SET COVER:

- Seien $x = 0$ und $y = 0$ ($x$ ist noch keine Überdeckung)

- WHILE $\exists k \in \{1, \ldots, m\}$ nicht überdeckt DO

  - erhöhe $y_k$ bis für eine Menge $S_j$ gilt $\sum_{i \in S_j} y_i = w_j$

    (Beachte: dies kann nur mit Mengen passieren die $k$ enthalten; sonst ist $a_{kj} = 0$, und die Erhöhung des $y_k$ bewirkt nichts.)

  - setze $x_j = 1$ d.h. sei $j \in C$

- gib $x$ als Überdeckung aus: $C := \{j \mid x_j = 1\}$

Laufzeit: es gibt maximal $m$ Iterationen

# Primal-Dual Algorithmus: Analyse

<u>Theorem:</u> Wenn jedes Element in maximal $\ell$ Teilmengen enthalten ist, dann ist der P-D Algorithmus $\ell$-approximativ.

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j = \sum_{j \in C} w_j = \sum_{j \in C} \sum_{i : i \in S_j} y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j : i \in S_j, j \in C} y_i \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \ell \cdot y_i = \ell \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i = \ell \cdot y^T \cdot b \leq \ell \cdot OPT_{frac} \leq \ell \cdot OPT$$

(Allgemein:

$$c^T \cdot x = (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) \leq \ell \cdot y^T \cdot b$$

)

# Zusammenfassung:Approximation und *relaxierte* Komplementäre Slackness

Stets gilt:

$$c^T \cdot x \geq (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) \geq y^T \cdot b$$

Theorem: $x$ ist eine $\alpha$-approximative Lösung, wenn die primalen komplementäre Slackness (PKS)

$$x_j = 0 \qquad oder \qquad y^T \cdot a^j = c_j \quad \forall j = 1, \ldots n$$

*und* die relaxierten dualen komplementäre Slackness (DKS) Bedingungen gelten:

$$y_i = 0 \qquad oder \qquad a_i^T \cdot x \leq \alpha b_i \qquad \forall i = 1, \ldots m$$

Beweis:

$$c^T \cdot x = (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) \leq \alpha \cdot y^T \cdot b \leq \alpha \cdot OPT_{frac} \leq \alpha \cdot OPT$$

# Beispiel 2: SHORTEST $s - t$-PATH

Eingabe: ein ungerichteter graph $G(V, E)$
mit ausgezeichneten Knoten $s, t$
Länge $\ell_e \geq 0$ für jede Kante $e \in E$

Ausgabe: ein kürzester $s - t$ Pfad

Behauptung:

Eine Kantenmenge $F \subset E$ enthält einen $s - t$-Pfad

$$\Updownarrow$$

jeder $s - t$-Schnitt von mindestens einer Kante aus $F$ gekreuzt wird.

# LP-Relaxierung SHORTEST $s-t$-PATH (P)

$$x_e = 1 \;\Leftrightarrow\; e \,\mathrm{in\,der\,Loesung\,F\,(Baum)}$$

$(P) \qquad \mathrm{minimiere}\ \sum_{e \in E} \ell_e \cdot x_e$ so dass

$$\sum_{e: e \in \delta(W)} x_e \geq 1 \qquad W \in \mathcal{S}$$

$$x_e \geq 0 \qquad e \in E$$

## Das duale LP für SHORTEST $s - t$-PATH (D):

- die Bedingung 'überquere $W$' für jeden $s - t$-Schnitt $W$ entspricht einer dualen Variable $y_W$
- die Variable $x_e$ für jede Kante $e$ entspricht einer dualen Bedingung für $e$

$(D)$ $\quad$ maximiere $\sum y_W$ so dass

$$\sum_{W \mid e \in \delta(W)} y_W \leq \ell_e \qquad e \in E$$

$$y_W \geq 0 \qquad W \in \mathcal{S}$$

Die $y_W$ kann als die *Mindest*kosten in der Pfadlänge für das Überqueren des Schnitts $W$ aufgefasst werden.

Primal-Dual Algorithmus für SHORTEST $s-t$-PATH:

- Seien $x = 0$ und $y = 0$ (der Baum $F = F_x = \emptyset$ )

- WHILE $F$ keinen $s-t$-Pfad enthält DO
  - sei $W'$ die Menge aller Knoten erreichbar aus $s$ über Kanten von $F$
  - erhöhe $y_{W'}$ bis für eine Kante $e \in \delta(W')$ gilt $\sum_{W|e\in\delta(W)} y_W = \ell_e$
  - setze $x_e = 1$ d.h. sei $F := F \cup \{e\}$ ($F$ bleibt ein Baum)

- $F$ enthält nun einen (eindeutigen) $s-t$-Pfad $P$, gib diesen aus

Laufzeit: es gibt maximal $|V|$ Iterationen

# Primal-Dual Algorithmus: Analyse

<u>Theorem:</u> Dieser P-D Algorithmus gibt einen kürzesten $s-t$-Pfad aus.

Sei $x' \leq x$ der $0-1$ vektor, der dem Pfad $P$ entspricht

$$\sum_{e}^{n} \ell_e \cdot x'_e = \sum_{e \in P} \ell_e = \sum_{e \in P} \sum_{W : e \in \delta(W)} y_W = \sum_{W} y_W \sum_{e : e \in P, e \in \delta(W)} 1 =$$

$$\sum_{W} y_W \cdot |\mathit{Kanten\ in\ P\ die\ W\ kreuzen}| = \sum_{W} y_W \cdot 1$$

(

$$c^T \cdot x = (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) = y^T \cdot b$$

)

<u>Behauptung:</u> Die DKS Bedingungen gelten: Wenn für einen $s-t$-Schnitt $y_W > 0$, dann kreuzt ihn der Pfad $P$ genau einmal.

# Zusammenfassung:

- Primal-Duale Algorithmen sind schnell, und *es brauchen keine LP-s gelöst zu werden*.
- Primal-Duale Algorithmen nutzen die kombinatorische Struktur des gegebenen Problems aus;
- Es gibt Primal-Duale Algorithmen für Netzwerkfluss-, Matching-, Shortest Path-, Steiner-Baum-, Facility Location-, k-Median-Probleme, etc. Für Probleme in $\mathcal{P}$ gibt es exakte P-D Algorithmen. (Siehe Shmoys und Vazirani.)
- P-D Algorithmen führen oft zu/entsprechen rein kombinatorischen Algorithmen (ohne LP).