GREEDY ALGORITHMEN

Matroide

Ein Plan...

Wir wollen

1. Kruskal's Greedy Algorithmus für andere Probleme mit ähnlicher Struktur definieren;

2. und untersuchen, für genau welche Probleme/Strukturen dieser greedy Algorithmus eine *optimale* Lösung findet.

Mengensysteme

Ein Mengensystem ist eine Menge von Teilmengen einer endlichen Grundmenge X.

zB. die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge *aller* Teilmengen von X.

Definition: Ein monotones Teilmengensystem über der endlichen Menge X ist ein Paar $(\mathcal{M}, X)$ so dass

- $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$

  (die Elemente von $\mathcal{M}$ sind die 'guten' Teilmengen von X)

- aus $Y \in \mathcal{M}$ und $Y' \subset Y$ folgt $Y' \in \mathcal{M}$.

  (alle Teilmengen einer guten Menge sind auch gute Mengen)

Wir nennen die Mengen von $\mathcal{M}$ unabhängig (statt 'gut').

Beispiel: Kreisfreie Kantenmengen eines Graphen

Sei $G(V, E)$ festgelegt.
Wir nennen $Y \subseteq E$ kreisfrei, falls $G(V, Y)$ keinen Kreis enthält.

Eigenschaften der kreisfreien Kantenmengen von G:

(monotones Teilmengensystem: Falls $Y \subseteq E$ kreisfrei ist, und $Y' \subset Y$, dann ist Y' auch kreisfrei.)

Greedy ist optimal für jede Gewichtung der Kanten: Der Kruskal Algorithmus ist optimal für kreisfreie Kantenmenge mit max Gewicht.

Ergänzungseigenschaft: Seien Y_1 und Y_2 kreisfreie Kantenmengen, und $|Y_1| < |Y_2|$, dann gibt es ein $e \in Y_2 \setminus Y_1$, so dass $Y_1 \cup \{e\}$ auch kreisfrei ist.

Maximalitätseigenschaft: in jeder fixierten Kantenmenge $Z \subset E$ haben alle *nicht-vergrößerbaren* kreisfreien Kantenmengen $Y \subseteq Z$ dieselbe Grösse.

Der Greedy Algorithmus für monotone Mengensysteme

MAXIMIERUNG-PROBLEM für monotone Mengensysteme:

Eingabe: ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ über der Menge X, und Gewichte $w_x \geq 0$ für jedes $x \in X$

Ausgabe: Bestimme eine unabhängige Menge $Y_{\max} \in \mathcal{M}$ mit maximalem Gewicht

der Greedy Matroid Algorithmus für monotone Mengensysteme:

Setze: $Y = \emptyset$

REPEAT

- entferne das $x \in X$ mit nächstgrößtem Gewicht aus X;
- falls $Y \cup \{x\}$ unabhängig, füge x zu Y hinzu

UNTIL $X = \emptyset$

Definition: Matroid

Theorem: Für ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ folgende sind äquivalent:

a. der Greedy Algorithmus *für jede Gewichtung w_x der Elemente* in X eine optimale Lösung bestimmt

b. die Ergänzungseigenschaft gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1, Y_2 mit $|Y_1| < |Y_2|$ gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\}$ auch unabhängig ist

c. die Maximalitätseigenschaft gilt: für beliebige Menge $Z \subseteq X$ gilt, dass *innerhalb von* Z alle nicht-vergrößerbaren unabhängigen Teilmengen haben dieselbe Größe.

Definition: Wenn ein monotones Mengensystem $(\mathcal{M}, X)$ a., b. oder c. erfüllt, (dann erfüllt es alle drei, und) heißt ein Matroid.

Matroide: Beispiele

Beispiele

1. Graph-Matroid: sei $G(V, E)$ fixiert, und sei

$$\mathcal{W} = \{E' \subset E \quad | \quad E' \text{ kreisfrei}\}$$

   dann ist $(\mathcal{W}, E)$ ein Graph-Matroid.

2. Matrix-Matroid: sei $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$,
   eine Vektormenge in $\mathbb{R}^n$ fixiert, und sei

$$\mathcal{L} = \{Y \subset X \quad | \quad Y \text{ linear unabh\~angig}\}$$

   dann ist $(\mathcal{L}, X)$ ein Matrix-Matroid.

Austauschbarkeit (Erweiterbarkeit)

Eine vierte äquivalente Eigenschaft von Matroiden:

Sei $(\mathcal{M}, X)$ ein monotones Teilmengensystem.

d. Austauschbarkeit:
   für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$,
   und jedes $x \notin Y_2$ gilt: wenn $(Y_1 \cup \{x\}) \in \mathcal{M}$
   dann gibt es ein $y \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

   (Wir können x gegen ein y austauschen, und so unabhängigkeit bewahren.)
   wird auch Erweiterbarkeit genannt

Behauptung: $(a.) \iff (b.) \iff (c.) \iff (d.)$

MATROID-SCHEDULING

Eingabe: n Aufgaben $A_1, A_2, \ldots, A_n$
mit Fristen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, und
Strafen $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
b_i ist zu bezahlen wenn A_i zum Zeitpunkt f_i nicht fertig ist.
Die Ausführung einer jeden Aufgabe nimmt 1 Zeitschritt.

Ausgabe: Die Aufgaben sind so auf *einem* Prozessor auszuführen, dass die Strafe minimiert wird.

Sei $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
eine Aufgabenmenge $Y \in \mathcal{M}$ falls
die Aufgaben in Y fristgerecht ausführbar sind.
Behauptung: $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid, und
der Greedy Algorithmus ergibt einen Schedule mit maximaler Nicht-Strafe.

Matroide: k-Matroide

Beispiel: Matchings

Sei $G(V, E)$ ein Graph, und eine Kantenmenge $M \in \mathcal{M}$ falls M ein Matching ist, d.h. keine zwei Kanten einen gemeinsamen Endpunkt haben.

Sei jetzt jede Kante e mit w_e gewichtet. Im Problem max-WEIGHTED-MATCHING suchen wir ein Matching mit maximalem Gewicht.

Greedy-Matching Algorithmus

$M := \emptyset$;

REPEAT

- sei $e \in E$ mit maximum w_e; setze $E := E \setminus \{e\}$;
- wenn $M \cup \{e\}$ ein Matching setze $M := M \cup \{e\}$

  (sonst verwirf e)

UNTIL $E = \emptyset$

Behauptungen:

a. Der Greedy-Matching Algorithmus ist 2-approximativ für max-WEIGHTED-MATCHING.

b. Seien M_1 und M_2 Matchings s.d. $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, dann gibt es eine $e \in M_2 \setminus M_1$ so dass $M_1 \cup \{e\}$ auch ein Matching ist (die 2-Ergänzungseigenschaft gilt).

c. Sei $Z \subseteq E$. Wenn M_1 und M_2 nicht-vergrößerbare Matchings im Graphen (V, Z) sind, dann gilt $|M_2| \leq 2|M_1|$ (die 2-Maximalitätseigenschaft gilt).

Definition: k-Matroid

Theorem: Folgende sind äquivalent für ein monotones Teilmengensystem:

a. der Greedy Algorithmus bestimmt *für jede Gewichtung der Elemente* eine k-approximative Lösung;

b. die k-Ergänzungseigenschaft gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1, Y_2 mit $|Y_2| > k \cdot |Y_1|$, gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist;

c. die k-Maximalitätseigenschaft gilt: für beliebige Menge $Z \subseteq X$, und je zwei nicht-vergrößerbare unabhängige Teilmengen gilt $|Y_2| \leq k \cdot |Y_1|$;

Definition: Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ heißt ein k-Matroid, wenn es eine (und somit alle) der Eigenschaften a., b. und c. erfüllt.

2-Austauschbarkeit: Beispiel

Behauptung:

d. Seien $M_1 \subseteq M_2$ Matchings in einem Graphen $G(V, E)$ und e eine Kante nicht in M_2.

   Wenn $M_1 \cup \{e\}$ ein Matching ist, dann gibt es höchstens 2 Kanten $e_1, e_2 \in M_2 \setminus M_1$, so dass $(M_2 \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e\}$ auch ein Matching ist.

   (Matchings sind 2-Austauschbar.)

k-Austauschbarkeit

d. Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ ist k-Austauschbar wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und jedes Element $x \notin Y_2$ gilt:

   Wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine Teilmenge $T \subseteq Y_2 \setminus Y_1$ von höchstens k Elementen so dass $(Y_2 \setminus T) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

Behauptung: Wenn $(\mathcal{M}, X)$ k-austauschbar ist, dann ist $(\mathcal{M}, X)$ ein k-Matroid.

(k-Matroid $\quad \not\Rightarrow \quad$ k-austauschbar)

Behauptung: Wenn ein Teilmengensystem $\mathcal{M}$ der Durchschnitt von k Matroiden $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k$ ist (über die selbe Grundmenge X), dann ist $\mathcal{M}$ k-austauschbar und somit ein k-Matroid.