LP11.

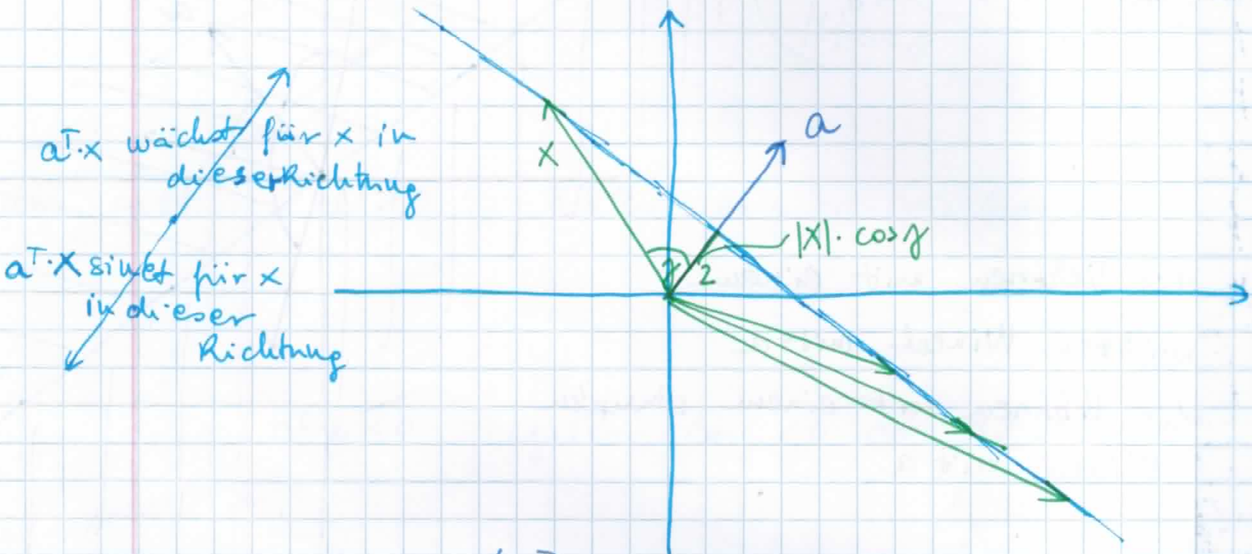
$a^T \cdot x = |a| \cdot |x| \cdot \cos\gamma = 10 \qquad \gamma = \measuredangle(x, a)$

$|a| = \sqrt{9+16} = 5$

Also wir suchen alle x Punkte mit

$|x| \cdot \cos\gamma = \frac{10}{5} = 2$

das sind genau die Vektoren, deren Projektion auf die Gerade von a genau 2 ist.



– Sei $b \in \mathbb{R}$ Die Punkte $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ mit $a^T \cdot x = b$ formen eine Gerade, parallel mit der Gerade $a^T \cdot x = 0$

---

ii.) Zusammenfassung + Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$
(wir denken an $\mathbb{R}^3$)

– $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$ usw. ist ein Vektor, bzw. dessen Endpunkt in $\mathbb{R}^n$

– $a^T \cdot x = |a| \cdot |x| \cdot \cos\gamma$ wobei γ der von a und x geschlossene Winkel ist.

(in DIM ≥ 4 wird γ so <u>definiert</u>: $\arccos \frac{a^T \cdot x}{|a| \cdot |x|}$)

– Wir definieren die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^n$ sei $a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = 0\}$ (sind all die Vektoren, die auf a orthogonal sind)

ist eine Hyperebene (in $\mathbb{R}^3$ eine Ebene) die 0 enthält.

zu a orthogonal

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = b\}$ ist eine (affine) Hyperebene in $\mathbb{R}^n$
(Verschiebung der obigen Menge)

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \geq b\}$
und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \leq b\}$ sind abgeschlossene Halbräume in $\mathbb{R}^n$

das alles brauchen wir für die geometrische Interpretierung der Lösungsmenge:

(ii.) Die Lösungsmenge (Lösungsraum) eines linearen Programmus
(ist unabhängig von c)

Sei $Ax \geq b$ ein lineares Programm in kanonischer Form (mit der zu minimierenden Zielfunktion $c^T x$)

Ein Vektor x mit $Ax \geq b$ heißt eine Lösung.

Das lineare Programm ist lösbar wenn Lösungen existieren, ansonsten ist es unlösbar. Die Lösungsmenge ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

Wie sieht im Allgemeinen so eine Lösungsmenge aus?

Die Menge aller Lösungen von einer Nebenbedingung $a_1^T \cdot x \geq b_1$ ist ein (abgeschlossener) Halbraum.

Die Lösungsmenge aller Nebenbedingungen ist also ein Durchschnitt von Halbräumen. Ein Durchschnitt von Halbräumen ist ein (konvex) Polyeder (oder Polytop wenn er beschränkt ist).

LP 13.

<u>Beobachtung</u>: Die Lösungsmenge ist ein Polyeder, weil sie der Durchschnitt der Halbräume

$\{x \mid a_i^T \cdot x \geq b_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$ ist, wobei a_i^T die

i-te Zeile der Matrix A ist.

<u>Beispiel</u>: Minimiere $-x_1 - x_2$

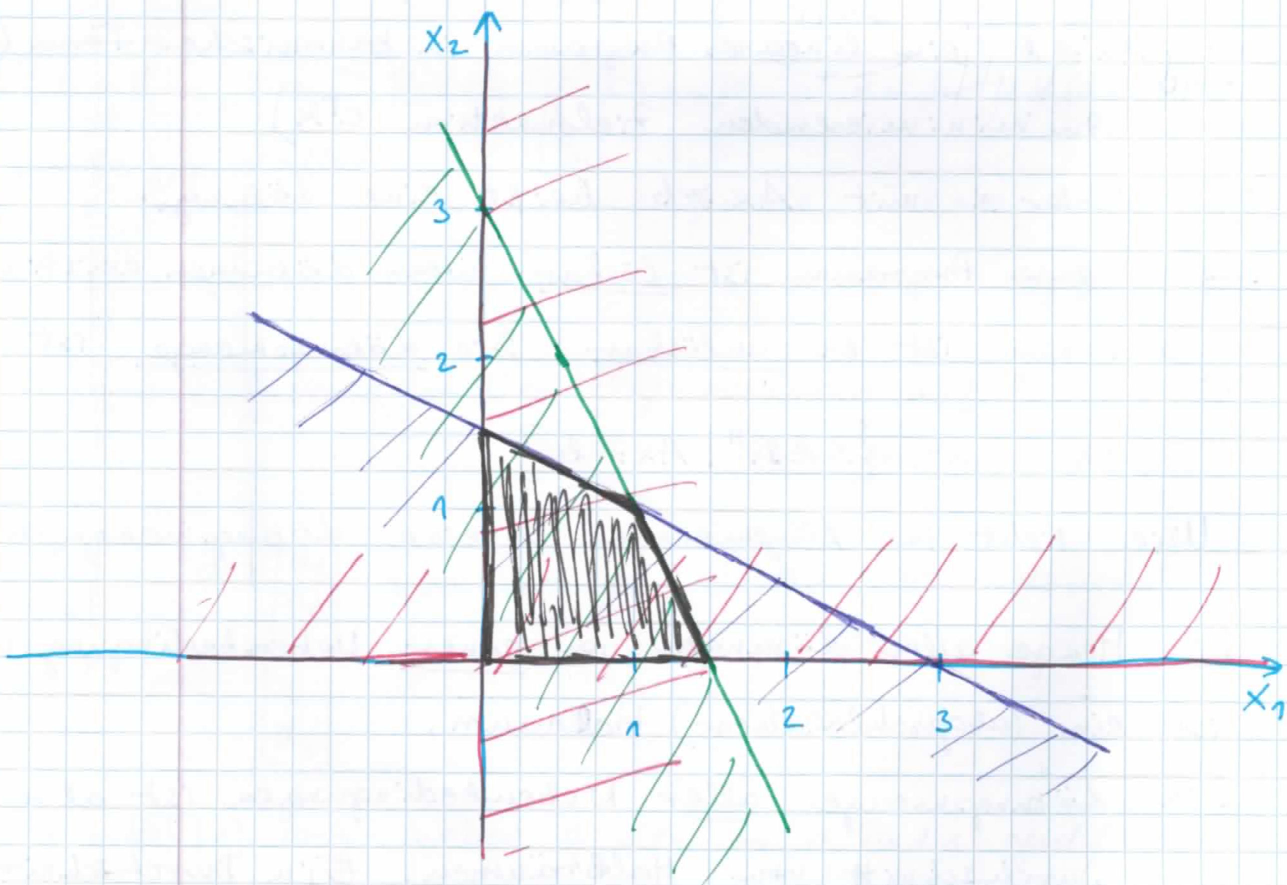
so dass $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

1. <u>Wir stellen die Lösungsmenge dar</u> in $\mathbb{R}^2$ weil $n=2$



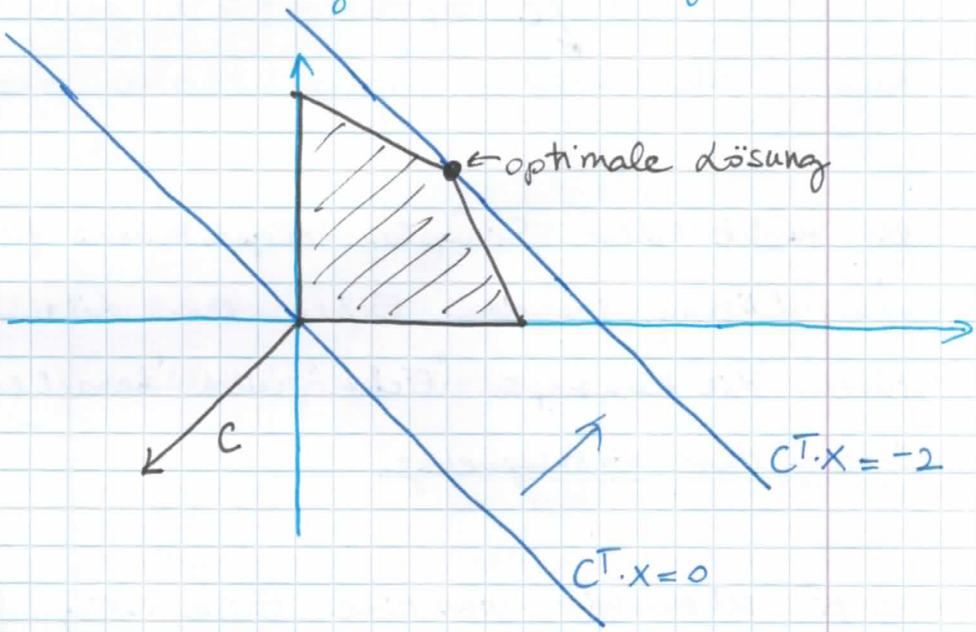
2. Für welche Lösung ist $-x_1 - x_2$ minimal?

Wir minimieren $c^T \cdot x$ wobei $c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$c^T \cdot x = 0$ ist eine Gerade die $\underline{0}$ enthält, und zu $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ orthogonal ist

$c^T \cdot x = \alpha$ ist eine parallele Verschiebung dieser Gerade nach 'oben' (Richtung $-c$) wenn $\alpha < 0$ und in Richtung c für $\alpha > 0$.

Um $c^T \cdot x$ zu minimieren, verschieben wir die Gerade so weit in Richtung $-c$ wie möglich:

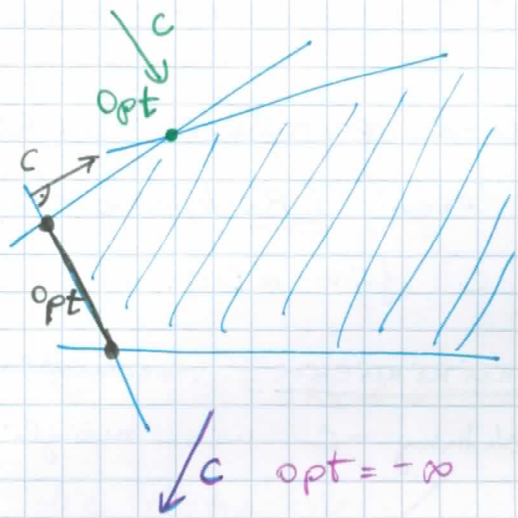


Offensichtlich wird $c^T \cdot x$ in der Ecke $x = (1, 1)$ $\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ der Lösungsmenge minimiert, und hier gilt

$c^T \cdot x = -2$

LP15.

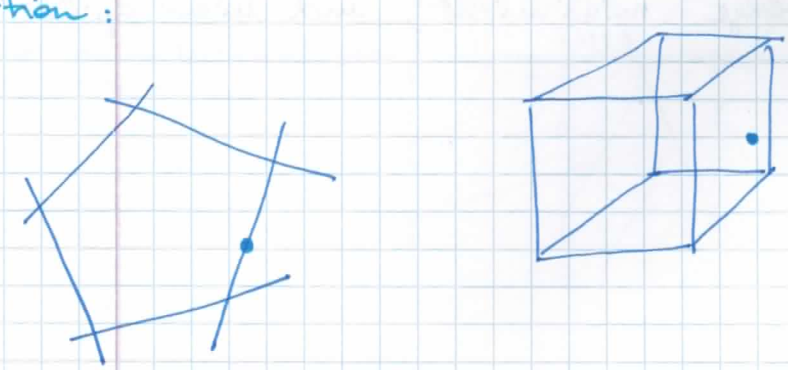
- Allgemein gilt, dass wenn der Lösungsraum nichtleer ist, (und mindestens eine Ecke hat), dann entweder ist das Minimum $-\infty$, oder es ist endlich, und wird (auch) in einer Ecke des Lösungsraums angenommen. (s.a. später)



- deshalb sucht der Simplex-Algorithmus für LP die optimale Lösung in den Ecken der Lösungsmenge. Wir formalisieren die Konzepte "Ecke" und "benachbarte Ecken".

Die Ecken der Lösungsmenge

in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sehen wir was eine Ecke ist; für den Algorithmus und für $\mathbb{R}^n$ allgemein brauchen wir eine algebraische Definition:



- Wie können wir die Lösungen (algebraisch) erkennen, die sich am Rand (Seitenfläche, Kante, Ecke) befinden

→ es gibt mindestens eine Nebenbedingung $a_i^T \cdot x \geq b_i$ die exakt (mit Gleichheit) erfüllt wird.

– Wieviele Nebenbedingungen müssen exakt erfüllt werden, um eine <u>Ecke</u> zu erhalten?

→ n linear unabhängige Nebenbedingungen (wobei n die Anzahl der Variablen ist)
also wir suchen die Lösungsvektoren x im n-dim Raum $\mathbb{R}^n$

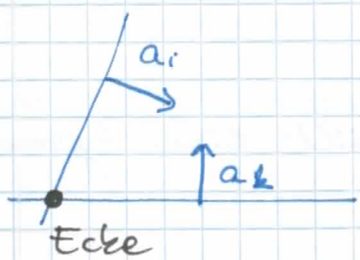
<u>Definition 1:</u> Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ das Lösungspolyeder zu einem LP
Eine <u>Lösung</u> $x^* \in P$ ist eine <u>Ecke</u>, wenn in x^* n linear unabhängige Nebenbedingungen exakt erfüllt werden.

($a_i^T \cdot x \geq b$ und $a_k^T \cdot x \geq b_k$ sind linear unabhängige Nebenbedingungen genau dann wenn a_i und a_k linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind)

↓

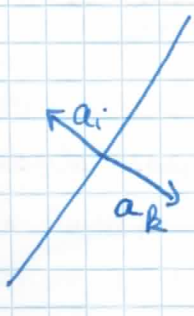
bei <u>mehr</u> als 2 Nebenbedingungen, soll die entsprechende <u>Teilmenge</u> von Zeilenvektoren a_i^T eine linear unabhängige <u>Menge</u> von Vektoren sein!

Bsp.

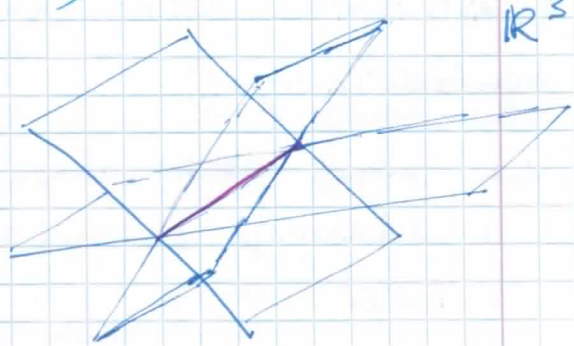


– Beispiele für linear <u>abhängige</u> Nebenbedingungen (die keine Ecke ergeben) obwohl die Lösungsmenge nicht leer ist

$\mathbb{R}^2$

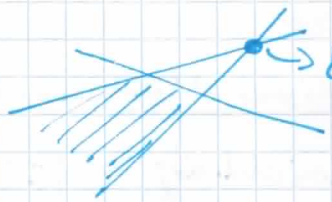


$\mathbb{R}^3$



LP 17.

– die Forderung $x^* \in P$ ist wichtig:



keine Ecke der Lösungsmenge

– eine alternative Definition für Ecken:

<u>Definition 2:</u> $x^* \in P$ ist eine <u>Ecke</u>, wenn es keinen Vektor $y \neq 0$ gibt so dass $x^* + y \in P$ und $x^* - y \in P$

(beachte, dass es sonst (für nicht-Ecken) einen solchen Vektor y immer gibt)

Bemerkung: Damit der Lösungsraum Ecken überhaupt <u>enthält</u>, braucht man also n linear unabhängige Nebenbedingungen a_i

(falls es $< n$ unabhängige Bedingungen gibt insgesamt

$\Updownarrow$

der Lösungsraum enthält eine Gerade

$\Downarrow$

es kann vorkommen, dass ein <u>endliches</u> Optimum in keiner Ecke angenommen wird

(finde ein Beispiel mit $n = 3$ und nur 2 Nebenbedingungen!))

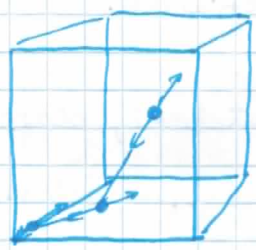
Im Folgenden wird stets angenommen, dass das LP n linear unabhängige Nebenbedingungen (und noch weitere) enthält.

Dies ist keine starke Einschränkung, da z.B. die Standardform, (die wir bald kennenlernen) sie stets erfüllt, und jedes LP ein äquivalentes LP in Standardform hat.

<u>Theorem:</u> Wenn für ein LP mit n Variablen, und n linear unabhängigen Nebenbedingungen ein endliches Optimum existiert, dann gibt es eine <u>optimale Ecke</u> des Lösungspolyeders. (Ein Alg. braucht also nur Ecken der Lösungsmenge ~~zu~~ besuchen, und dies sogar nur "in Richtung" $-c$ tun!)

[Warum? (beide Definitionen einer Ecke werden benutzt)

sei P das Lösungspolyeder



- sei $x \in P$ eine optimale Lösung ($c^T \cdot x$ minimal)
- falls x eine Ecke $\rightarrow$ fertig
- sonst gibt es ein y sodass $x + y \in P$ und $x - y \in P$

- es gilt $c^T \cdot (x+y) = c^T \cdot x = c^T \cdot (x-y)$

  oder $c^T \cdot (x+y) > c^T \cdot x > c^T \cdot (x-y)$

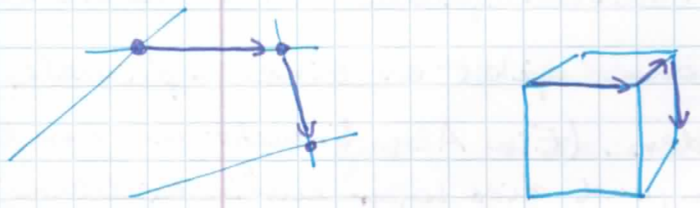
  oder $c^T (x+y) < c^T \cdot x < c^T \cdot (x-y)$

  (je nachdem ob wir von der Hyperebene $c^T \cdot x = 0$ uns entfernen oder näher kommen)

  Die beiden letzten Fälle sind ausgeschlossen, weil x schon optimal war, also $x+y$ und $x-y$ sind auch optimal

- P enthält keine Gerade (nach Annahme) also entweder in Richtung y oder in Richtung $-y$ erreichen wir eine (neue) Bedingung die exakt erfüllt wird. Entweder sind wir in einer Ecke, oder wir machen weiter mit neuem y
- wenn n Bedingungen exakt erfüllt werden, sind wir in opt. Ecke]

- Da wir das Optimum (Minimum) in einer Ecke suchen, werden wir mit dem Simplex-Algorithmus von Ecke zur Ecke wandern, und zwar von einer Ecke in eine benachbarte Ecke, solange es eine benachbarte Ecke mit kleinerem Zielwert gibt. Wir brauchen also das Konzept einer benachbarten (adjazenten) Ecke



intuitiv: die Ecken x^* und x^{**} sind benachbart wenn sie sich an einer gemeinsamen Kante befinden.

(Wie können wir algebraisch ausdrücken, dass eine Lösung x an einer Kante des Lösungspolyeders ist?

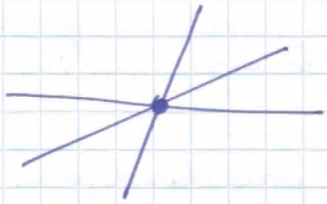
Wie viele Nebenbedingungen werden an einer Kante als Gleichheit erfüllt? $\longrightarrow$ $n-1$ Nebenbedingungen.

Definition: Zwei Ecken $x^*, x^{**} \in P$ sind benachbart oder adjazent, wenn es $n-1$ linear unabhängige Nebenbedingungen $a_i^T \cdot x \geq b_i$ gibt, die x^* und x^{**} beide exakt erfüllen.

(die beiden Ecken unterscheiden sich in nur einer exakt erfüllten Bedingung)

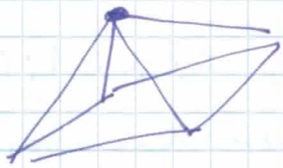
(Entartete Ecken: Die Ecke $x^* \in P$ ist entartet, wenn in x^* mehr als n Nebenbedingungen exakt erfüllt werden

Bsp. $\mathbb{R}^2$



≥ 3 Geraden

$\mathbb{R}^3$



≥ 4 Ebenen

entartete Ecken bereiten Schwierigkeiten für den Simplex-Algorithmus, der die entartete Ecke als viele benachbarten Ecken auffasst, und deshalb im Kreis laufen kann (siehe später))

iv.) <u>Lineare Programme in Standardform</u>

<u>Definition:</u> <u>lineares Programm in Standardform:</u>

minimiere $c^T \cdot x$, so dass $A \cdot x = b$, $x \geq 0$

$$\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{Q}^n \quad A \in \mathbb{Q}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{Q}^m \right)$$

(Bemerkung: in der kanonischen Form (wenn die Vorzeichenbedingungen nicht separat sind) braucht man $m \geq n$ um n linear unabhängige Bedingungen zu haben. In der Standardform, wie wir sehen werden, $m \leq n$ (aber die Vorzeichenbedingungen gehören nicht zur Matrix A))

LP21.

Behauptung: Jedes lineare Programm (in kanonischer Form) hat ein äquivalentes LP in Standardform

($\Rightarrow$ die Standardform ist auch allgemein genug)

Beweis: 1. Für jede Ungleichung $a_i^T \cdot x \geq b_i$ in der kanonischen Form, führen wir eine sog. Slackvariable s_i ein, und ersetzen $a_i^T \cdot x \geq b_i$

durch $a_i^T \cdot x - s_i = b_i$

$s_i \geq 0$

2. die Standardform fordert $x_j \geq 0 \ \forall j$

- falls im kanonischen LP $x_j \geq 0$ gefordert wird ok. ✓

- falls im kanonischen LP $x_j \leq 0$ gefordert wird ersetzen wir $-x_j$ durch eine neue Variable x_j^-

$$x_j^- = -x_j$$

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j^- \geq 0$$

- falls im kanonischen LP x_j beliebig ist, ersetzen wir x_j durch die ~~[illegible]~~ Differenz zweier positiven Variablen (nichtnegativen)

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

und die Bedingungen

$$x_j^+ \geq 0$$

$$x_j^- \geq 0$$

(~~[illegible]~~)

(Warum brauchen wir wieder eine neue Form?

→ die kanonische Form ist anschaulich und intuitiv, die Standardform ist besser geeignet als Eingabe (und die Beschreibung) von Algorithmen wie der Simplex-Algorithmus, oder das Interior-Point Verfahren)

Beispiel 1. minimiere $2x_1 + 4x_2$

so dass $x_1 + x_2 \geq 3$

$$3x_1 + 2x_2 = 14$$

$$x_1 \geq 0$$

Konstruieren wir die äquivalente Standardform:

- nach Einführung der Slackvariable in die erste Bedingung, haben wir

minimiere $2x_1 + 4x_2$

so dass $x_1 + x_2 - s_1 = 3$

$$3x_1 + 2x_2 = 14$$

$$x_1 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0$$

- um Nichtnegativität fordern zu können ersetzen wir x_2 durch $x_2^+ - x_2^-$ und erhalten

minimiere $2x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$

so dass $x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_1 = 3$

$$3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- = 14$$

$$x_1 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0$$

$$x_2^+ \geq 0$$

$$x_2^- \geq 0$$

LP23.

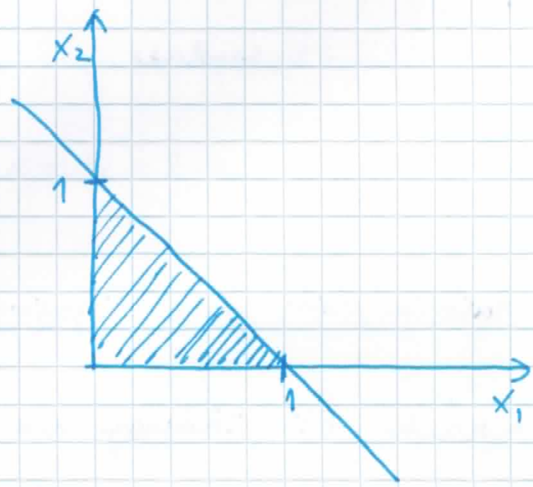
Beispiel 2. minimiere $c^T \cdot x$

so dass $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

- das ist ein LP in $\mathbb{R}^2$ mit der Lösungsmenge



- das äquivalente LP in Standardform:
  (die Nebenbedingungen)

$x_1 + x_2 + s_1 = 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$s_1 \geq 0$

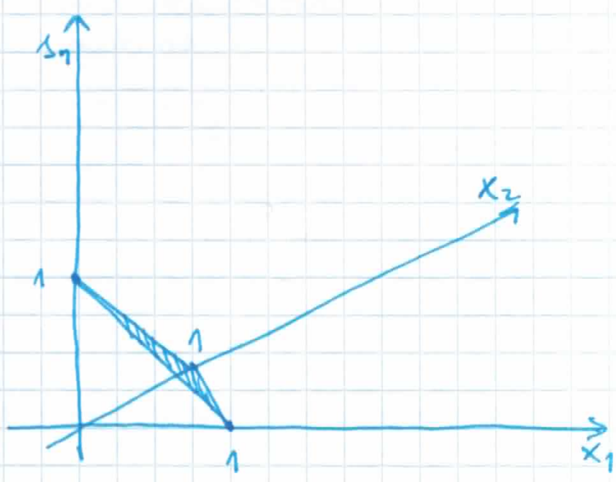
Wie ändert sich das Lösungspolyeder?

die Standardform ist ein LP in $\mathbb{R}^3$

die Gleichung

$x_1 + x_2 + s_1 = 1$

bestimmt eine affine Ebene in $\mathbb{R}^3$



Beobachtung:

→ die Hinzunahme von (jeder) s_1 zu den Variablen hat die Dimension n erhöht $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ wird gesucht

→ aber gleichzeitig (jede) Bedingung die als Gleichheit erfüllt werden muss, reduziert die Dimension des Lösungsraums.

⇒ unser 2-dimensionaler Lösungsraum ist (eigentlich) 2-dimensional geblieben (eine affine Ebene enthält den Lösungsraum)

(übrigens gilt das selbe <u>nicht</u> für die Transformation

$$x = x^+ - x^-$$

diese erhöht die Dimension, und kann z.B. eine neue Ecke erzeugen.)

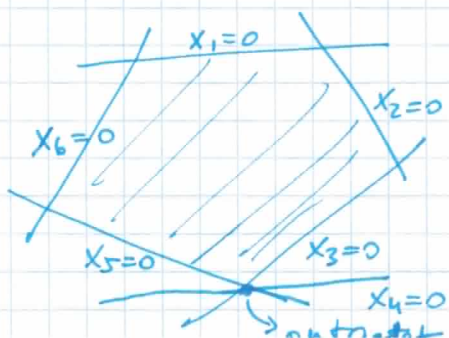
In der Standardform enthält die Lösungsmenge keine Gerade (wegen $x \geq 0$), und sie hat immer einige Ecken. Wie werden wir das Lösungspolyeder darstellen / uns vorstellen können?

Sei $Ax = b$ $x \geq 0$ ein LP in Standardform, mit n Variablen und m Gleichungen in $Ax = b$.

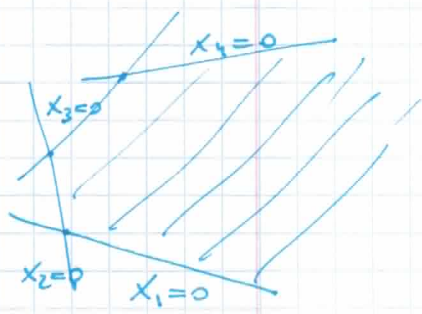
Das Lösungspolyeder P ist $n-m$ dimensional

(falls $P \neq \emptyset$ und die a_i^T linear unabhängig sind)

(Wir denken an Beispiele mit $n-m=2$ oder $n-m=3$, und stellen uns die Lösungsmenge (für $n-m=2$) so vor:



oder



LP25.

- die m Gleichungen werden in jeder Lösung x exakt erfüllt, und diese bestimmen keine Kante des Polyeders

- der Lösungsraum von $x \geq 0$ ist n-dimensional; die Bedingungen $A \cdot x = b$ zwingen P in einen $n-m$ dimensionalen (affinen) Raum. Jede Bedingung nimmt eine Dimension (einen Freiheitsgrad) aus n weg.

- in einer Ecke $x_j = 0$ gilt für $n-m$ Komponenten j
(in einer entarteten Ecke $x_j = 0$ für $> n-m$ Komponenten j)

~~[illegible]~~

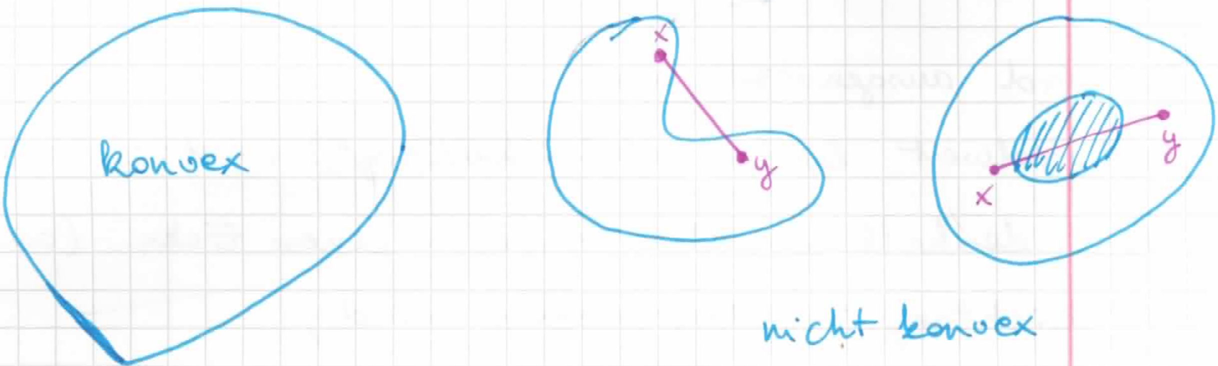
(Erklärung: x^* ist eine Ecke, wenn $\geq n$ Nebenbedingungen (und n unabhängige darunter) in x^* exakt (als Gleichung) erfüllt werden. die m Gleichungen in $A \cdot x^* = b$ werden schon (automatisch) exakt erfüllt. Deshalb braucht man noch $n-m$ von den n Ungleichungen $x_j \geq 0$ die in x^* exakt erfüllt werden. Für diese $n-m$ Komponenten j gilt $x^*_j = 0$ in der Ecke x^*)

Konvexität.

eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, wenn

für jede $x \in S$ und $y \in S$, die x und y verbindende

Strecke $\{ \lambda x + (1-\lambda) y \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \} \subseteq S$
auch zur S gehört



nicht konvex

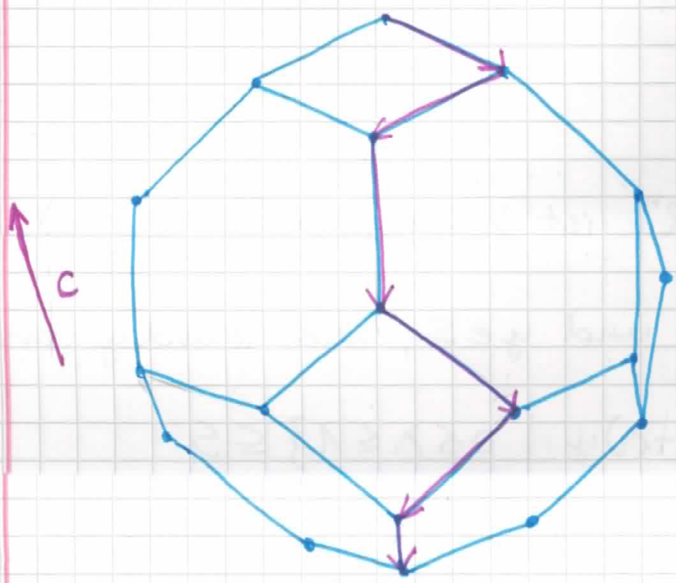
- ein Halbraum ist immer konvex
- der Durchschnitt von konvexen Mengen ist immer konvex.

$\Longrightarrow$ da der Lösungsraum der Durchschnitt von Halbräumen ist, ist er immer konvex

Der Simplex Algorithmus

Die Simplex Methode war der erste Algorithmus für die Lösung von linearen Programmen.

Gegeben ist ein LP in der Standardform als Eingabe.
Betrachte das Lösungspolyeder ...



Es wird ausgenutzt, dass

- der Zielwert linear ("gleichmäßig") sinkt in Richtung −c und deshalb das Minimum in einer Ecke (am weitesten in Richtung −c) angenommen wird;
- das Lösungspolyeder konvex ist.

Der Simplex Algorithmus ist greedy (bzw. macht lokale Suche) und läuft immer auf eine benachbarte Ecke "in Richtung −c" weiter.
Aus der Konvexität des Polyeders folgt, dass falls er nicht weiterlaufen kann (d.h. er ist in einem lokalen Minimum angekommen), ist er schon in einem <u>global</u> minimalen Punkt.

(für nicht-konvex gilt nicht)

Es kann für die Laufzeit entscheidend werden, auf welche (bessere) benachbarte Ecke der Algorithmus jeweils weiterläuft. Die Regel, die die nächste Ecke für eine beliebige aktuelle Ecke auswählt, heißt Pivot Strategie (pivoting rule)

Laufzeit?

In jeder Iteration werden Matrizen (Vektoren) invertiert, multipliziert u. addiert. $\longrightarrow$ Poly (n, m)

Aber: Wie hoch ist die Anzahl der Iterationen d.h. wieviele Ecken durchläuft der Simplex-Alg. im Worst-Case?

Wieviele Ecken gibt es (asymptotisch) überhaupt?

zB. der Würfel ist das Lösungspolyeder für

$$0 \le x_i \le 1 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Wieviele Ecken hat der Würfel?

Jeder 0-1 Vektor ist eine Ecke $\Longrightarrow 2^n$ Ecken

Es gibt tatsächlich worst-case Beispiele so dass der Simplex Algorithmus jede Ecke eines verzerrten Würfels durchläuft

$\Downarrow$

Thm: Der Simplex-Algorithmus hat im Worst-Case $\Omega(2^n)$ Iterationen, und ist somit kein polynomieller Algorithmus. poly $(n) \cdot 2^n$ ist exponentielle Laufzeit

Jedoch wird der Simplex-Algorithmus in der Praxis erfolgreich verwendet!

[Genauer: für jede Pivot-Strategie gibt es Instanzen die zu exponentieller Laufzeit führen.

Geschichte :

– 1947 Dantzig der Simplex-Algorithmus

– 1979 Khachiyan der erste polynomielle Algorithmus:

die Ellipsoid-Methode

führt letztendlich indirekt zu einem praktischen polynomiellen Algorithmus:

– 1984 Karmarkar das Interior-Point Verfahren

(gut für große Programme, wenn eine approximative Lösung ausreicht)

f.) Anwendungsbeispiele:

Lineare Programmierung und Approximation

1.) VERTEX COVER

Eingabe: $G(V,E)$ mit Knotengewichten w_v

Ausgabe: eine Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ mit minimalem Gesamtgewicht der Knoten in C

LP-Relaxierung des Problems:

minimiere $\sum_{v=1}^{n} x_v w_v$

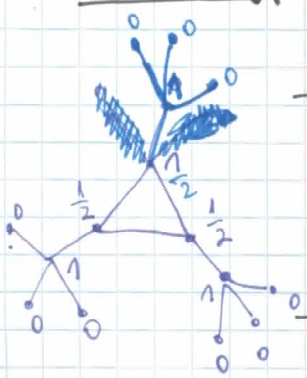
so dass $x_v + x_u \geq 1 \quad \forall \{u,v\} \in E$ 

$0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V$

(beabsichtigte Bedeutung: $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in C \\ 0 & v \notin C \end{cases}$)

Für manche Probleme gibt die fraktionale Lösung (die optimale Lösung der LP-Relaxierung) Hinweise darüber, wie eine gute Lösung des ganzzahligen Problems tendenziell aussieht:

Ein Approximationsalgorithmus (deterministisches Runden)



- löse das LP; bei $x^* = (x_1^* \; x_2^* \; \ldots \; x_n^*)$ die optimale fraktionale Lösung
- setze $v \in C$ (in die Knotenüberdeckung) genau dann, wenn $x_v^* \geq \frac{1}{2}$

<u>Behauptung 1:</u> Diese C ist eine Knotenüberdeckung.

Warum? Für jede Kante $\{u,v\}$ gilt

$x_u^* + x_v^* \geq 1 \Rightarrow$ entweder $x_u^* \geq \frac{1}{2}$ und

$\Rightarrow u \in C$

oder $x_v^* \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow v \in C$

<u>Behauptung 2:</u> Der Algorithmus mit deterministischem Runden ist 2-approximativ.

<u>Beweis:</u>

das Optimum der LP-Relaxierung ist nicht schlechter als das ganzzahlige Optimum VC_{OPT}

$$\sum_{v=1}^{n} w_v \cdot x_v^* \leq VC_{OPT}$$

Für jeden Knoten $v \in C$ in der Ausgabe gilt

$$\frac{1}{2} \leq x_v^*$$

$$1 \leq 2 \cdot x_v^*$$

deshalb: $$VC_{ALG} = \sum_{\{v \mid x_v^* \geq \frac{1}{2}\}} 1 \cdot w_v \leq \sum_{\{v \mid x_v^* \geq \frac{1}{2}\}} 2 \cdot x_v^* \cdot w_v \leq \sum_{v=1}^{n} 2 \cdot x_v^* \cdot w_v = 2\, VC_{OPT}$$

Wert als ganzzahlige Lösung

[Es gilt auch: jede Ecke des Lösungspolyeders des LP hat nur Einträge aus $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Warum? Sei $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ eine fraktionale Lösung

sei $0 < \varepsilon$ so dass $0 < x_i < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x_i \pm \varepsilon < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x_i < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < x_i \pm \varepsilon < 1$

sei $$y_i = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_i < 1 \\ -\varepsilon & \text{falls } 0 < x_i < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann gilt $x+y$ und $x-y$ sind auch Lösungen $\Rightarrow$ x war keine Ecke

LP41.

2.) INDEPENDENT SET (wo Runden (auch) nicht hilft)

<u>Eingabe:</u> $G(V,E)$

<u>Ausgabe:</u> eine unabhängige Knotenmenge $I \subseteq V$ mit maximaler Anzahl von Knoten

(I darf keine benachbarte Knoten enthalten)

<u>LP-Relaxierung:</u>

maximiere $\sum_{v=1}^{n} x_v$

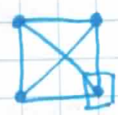
so dass $x_u + x_v \leq 1 \quad \forall \{u,v\} \in E$

$0 \leq x_v \leq 1$

Wir haben gesehen: beim VC ist das ganzzahlige Optimum höchstens um Faktor 2 höher als das fraktionale Optimum. Dies ist nicht notwendigerweise (d.h. für jedes Problem) so:

<u>Beobachtung:</u> Im Fall von INDEPENDENT SET gibt es Graphen mit fraktionalen Lösungen, die um den Faktor $\Omega(n)$ besser sind als das ganzzahlige Optimum.

<u>Beispiel:</u> Ein vollständiger Graph:



- das ganzzahlige Optimum: 1

$(1,0,0,0,0,\ldots,0)$

- das fraktionale Optimum:

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{2})$

mit Zielwert $\frac{n}{2}$

Das (Ab)runden dieser fraktionalen Lösung ergibt keine wertvolle ganzzahlige Lösung.