Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2019/2020

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 14

Ausgabe: 05.02.2020
Abgabe: 12.02.2020

Aufgabe 14.1. (2 + 3 + 4 Punkte)

Seien A und B disjunkte Mengen mit $1 < |A| = |B| < \infty$ und $X = A \cup B$. Definiere das folgende monotone Teilmengensystem:

$$\mathcal{M} = \{Y \mid Y \subseteq A \vee Y \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

a) Zeige, dass für $\mathcal{M}$ die Ergänzungseigenschaft *nicht* gilt.

b) Zeige, dass für $\mathcal{M}$ die Maximalitätseigenschaft *nicht* gilt.

c) Gib eine Gewichtung $\varphi\colon X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ für die Elemente von X an, so dass der Greedy-Matroid-Algorithmus keine Teilmenge $Y \in \mathcal{M}$ mit maximalem Gewicht ausgibt.

Widerlege die drei Matroid-Eigenschaften direkt, ohne ihre Äquivalenz zu verwenden. Jede Teilaufgabe ist also separat zu bearbeiten.

Aufgabe 14.2. (3 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantengewichten w_e für $e \in E$. Weiter seien $S, R \subset E$ disjunkte Kantenmengen, es gelte also $S \cap R = \emptyset$.

Beschreibe kurz einen Algorithmus, der unter der folgenden Menge von 1-Bäumen, einen mit minimalem Gewicht ausgibt (falls die Menge nichtleer ist).

$$\{T \subset E \mid T \text{ ist ein 1-Baum, } S \subset T,\ T \cap R = \emptyset\}$$

Aufgabe 14.3. (4 Punkte)

Gegeben sind die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, und für **jede** $T \subset \{1, \ldots, k\}$ mit $|T| = k-1$ die lineare Bedingung

$$\sum_{i \in T} x_i \leqslant 1$$

Zeige, dass aus diesen Bedingungen die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \frac{k}{k-1}$$

folgt.

Bitte wenden!

Aufgabe 14.4. (2 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Fixiere $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $n = 2^k$. Betrachte für das euklidische TSP die Instanz mit Punktemenge $P = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant a, b \leqslant n\}$.

a) Bestimme eine Rundreise optimaler Länge und beweise die Optimalität deiner Lösung.

b) Wir nennen für $i \in \{1, \dots, k\}$ und ungerade m die vertikalen Linien mit x-Koordinate $x = m \cdot 2^{k-i} + 0.5$ und die horizontalen Linien mit y-Koordinate $y = m \cdot 2^{k-i} + 0.5$ *Gitterlinien der Schicht i*. Bestimme rekursiv eine optimale Rundreise, die jede vertikale und horizontale Gitterlinie der Schicht i höchstens 2^i-mal kreuzt. Visualisiere deine Lösung für $n = 8$.

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`